误差分布论

WUCHA FENBULUN

刘智敏 著



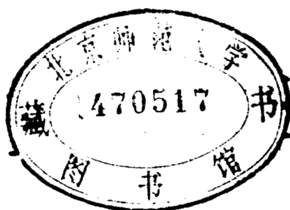
原子能出版社

误差分布论

The Theory of Error Distribution

刘智敏 著

by Liu Zhimin



原子能出版社

内 容 简 介

本书论述了误差与数据处理的基础——误差分布论。全书分十六章，第一至第五章介绍矩阵与概率知识，第六第七章讨论正态分布、小子样分布及其它基本分布，第八第九章介绍多元分布及估计检验多组误差分析，第十章讨论最小二乘法中的分布，第十一第十二章介绍和讨论非中心分布、Wishart 分布、Hotelling 分布与经验公式中的分布，第十三至第十五章研究粗差分布、投影误差分布及威布尔分布，第十六章介绍不确定度。书中引用了最新科研成果，并尽量将理论与实际应用结合起来。

本书是在作者为中国科学院研究生院、清华大学等单位讲课的讲稿基础上写成的，可供科学工作者，特别是实验人员、计量人员使用，亦可供工程设计人员、高等院校和研究生院（部）有关专业师生参考。

误 差 分 布 论

刘智敏 著

原子能出版社出版

（北京2108信箱）

重庆印制一厂印刷

（重庆市中区枇杷山后街79号）

新华书店总店科技发行所发行 · 新华书店经售



开本787×1092 1/32 · 印张14.75 · 字数 326 千字

1988年 8 月北京第一版 · 1988年 8 月北京第一次印刷

印数 1—2800

统一书号：15175·835　　定价：3.75元

ISBN 7-5022-0069-X/O·7

前　言

误差与数据处理对科学研究和生产实践极为重要，它是分析科学实验和测量结果的必不可少的知识，各科研机构、国民经济各部门和高等院校对这一学科都极其重视，目前对它的研究愈来愈多。为了深入掌握这一学科，必须研究它的基础——误差分布论。

本书介绍了概率基本概念后，接着介绍了数据处理必需的近代矩阵知识，然后讨论了随机变量性质和特征。在此基础上，详细讨论了误差分析中所需用的正态分布、小子样分布、两点分布、均匀分布及反正弦分布等基本分布。为了分析大量数据，讨论了多元分布、估计理论假设检验与多组测量误差分析以及最小二乘法中的分布，接着讨论和研究了非中心分布、Wishart 分布、Hotelling 分布和经验公式中的分布。最后仔细分析了近代提出的粗差分布、投影误差分布、威布尔分布及其应用。这些都是误差与数据处理使用和研究中所必须了解的分布。最后以国际讨论结果为基础介绍了不确定度的知识。

本书引用了最新科研成果，全书既有理论，也有它们的应用。它不但是学习误差与数据处理所必须知道的内容，也是深入研究误差与数据处理所必须了解的基础理论。

本书是在多次讲课的讲稿基础上修改而成的，不妥之处，切盼指正。

刘智敏

于中国计量科学研究院

目 录

第一章 概率概念

第一节 概率定义

一、概率的古典定义

若实验时，有且只有几个可能发生的情况，并且每个情况都是等可能的，其中恰有 m 个情况具有性质 E，则 E 出现的概率

$$P(E)=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

例 1 箱中有20个球，其中12个为白球，8个为黑球，称摸出白球的事件为 E，求摸出白球概率 $P(E)$。

因球总数为20，表明可能结果有20个，导致白球出现的结果有12个，故

$$P(E)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

加法性质 若 A_1，A_2，…，A_m 是 m 个两两互不相容（即任两个不能同时出现）的事件，则至少一个 A_i 出现的概率

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m) \tag{1.2}$$

乘法性质 若 A_1，A_2，…，A_m 是 m 个互相独立的事件（一事件的出现与否不影响其它事件的出现），则各 A_i 同时出现的概率

$$P(A_1A_2\cdots A_m)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_m) \qquad (1.3)$$

例 2 数字舍入时，以末位 1 为单位，当尾数小于 0.5 时舍去，大于 0.5 时进 1，等于 0.5 时视末位为奇则进 1，为偶则舍去，求末位为奇的概率。

末位全部可能出现数字为 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，它们两两互不相容，末位为奇即末位为 1，3，5，7，9 中任一数，由加法性质

$$\begin{aligned}P(\text{末位为奇})&=P(\text{末位为 1})+P(\text{末位为 3})\\&\quad+\cdots+P(\text{末位为 9})\\&=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 3 服从正态分布的偶然误差 δ，其 $|\delta|<3\sigma$ 的概率为 0.9973（σ 为标准差），若独立测两次，得 δ_1 及 δ_2，求两次 $|\delta|$ 皆不超过 3σ 的概率[1]。

两次皆不超过 3σ，即 $|\delta_1|$ 与 $|\delta_2|$ 同时不超过 3σ，由乘法性质，此概率为

$$\begin{aligned}P(|\delta_1|<3\sigma)P(|\delta_2|<3\sigma)&=0.9973\times0.9973\\&=0.9946\end{aligned}$$

二、概率与频率

在相同条件下，对同一实验的几次测量中，可能出现的事件（结果）为 A，B，…。若事件 A 出现的次数是 m，m 与总实验次数 n 之比 $\frac{m}{n}$ 称为在 n 次实验中 A 出现的频率。随着次数 n 的增加，$\frac{m}{n}$ 将趋于稳定，所稳定到的常数，叫做理

论频率，我们把这个理论频率作为在给定条件下事件 A 出现的概率。

例 4　投钱币时，出现正面的频率稳定在$\frac{1}{2}$，如蒲丰(Buffon)投过4040次，得2048次正面，其频率为 $2048/4040=0.5069$，皮尔逊（Pearson）投过24000次，得12012次正面，其频率为 $12012/24000=0.5005$，故可认为出现正面的概率为$\frac{1}{2}$。

例 5　测量某长度时，认为仅有正态分布的偶然误差，而一次测量中，误差可能为正，也可能为负。但在大量的重复测量中，随着测量次数的增加，正误差与负误差出现的频率都稳定到$\frac{1}{2}$，因此，出现正误差这一事件 A 或出现负误差这一事件 B 的概率均为$\frac{1}{2}$。

三、概　率　场

在实验中一定发生的事件叫必然事件，在实验中不会发生的事件叫不可能事件。

我们约定：

AB(也写作 $A\cap B$)：表事件 A 与事件 B 同时出现的事件；

$A+B$(也写作 $A\cup B$)：表事件 A 或事件 B 中至少有一个出现的事件；

$\bar{A}$：表事件 A 不出现的事件（A 的逆事件）；

Ω：表必然事件，显然 $P(\Omega)=1$；

Φ：表不可能事件，显然 $P(\Phi)=0$。

按概率场定义的概率如下：

1. 由基本事件的全体组成基本空间Ω。

2. Ω中某些子集组成集类（称事件域）F，满足

（1） $\Omega\in F$；

（2） 若$A_n\in F$，则$\bigcup A_n\in F$；

（3） 若$A\in F$，则$\bar{A}\in F$。

3. 定义在F上的一个非负集合函数$P(A)$，满足

（1） $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，当$A\in F$时；

（2） $P(\Omega)=1$；

（3） 若$A_n\in F$，$A_iA_j=\Phi(i\neq j)$，则

$$P(\bigcup A_n)=\sum P(A_n)$$

称$P(A)$为事件A的概率。

第二节　概率基本运算

设B是具有正概率的事件，那么对于事件A，我们把

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.4}$$

称为在事件B发生的条件下事件A发生的概率，或称为事件A对于事件B的条件概率。

如在相同条件下进行了几次实验。设所得实验结果中，事件B出现了m次，在这m次中，事件A出现了$k\leqslant m$次。那么积事件AB的概率为$\frac{k}{n}$，事件B的概率为$\frac{m}{n}$，在事件B出现下事件A的概率为$\frac{k}{m}$，故

$$P(A|B)=\frac{k}{m}=\frac{k}{n}\Big/\frac{m}{n}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

从而成立式(1.4)。

若关系式

$$P(A|B)=P(A)$$

成立，表明“已知事件 B 发生”这一条件并不影响事件 A 出现的概率，即 A 与 B 是互相独立的，此时，由式(1.4)可得

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.5}$$

若有事件 A_1，A_2，…，A_m，则

$$P(A_1A_2\cdots A_m)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_m|A_1A_2\cdots A_{m-1}) \tag{1.6}$$

其中 $P(A_m|A_1A_2\cdots A_{m-1})$为 A_1，A_2，…，A_{m-1}同时出现条件下 A_m 出现的概率。

我们再看多个事件和的概率[2]。

对任意两事件 A_1，A_2，因

$$A_1+A_2=A_1+A_2\bar{A}_1$$

$$A_1(A_2\bar{A}_1)=\Phi$$

故

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2\bar{A}_1)$$

但

$$A_2=A_1A_2+\bar{A}_1A_2$$

$$(A_1A_2)(\bar{A}_1A_2)=\Phi$$

故

$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(A_2\bar{A}_1)$$

于是

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2) \tag{1.7}$$

推广至任意 m 个事件 A_1，A_2，…，A_m，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=S_1-S_2+S_3-S_4\cdots+(-1)^{m+1}S_m \tag{1.8}$$

其中

$$S_1=\sum_i P(A_i)$$

为单个事件出现概率和；

$$S_2=\sum_{i<j} P(A_iA_j)$$

为任二个事件同时出现概率和；

$$S_3=\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)$$

为任三个事件同时出现概率和；

且有彭费雷尼（Benferroni）不等式

$$S_1-S_2+\cdots-S_{2n}\leqslant P(A_1+A_2+\cdots+A_m) \leqslant S_1-S_2+\cdots-S_{2n}+S_{2n+1} \tag{1.9}$$

特别

$$S_1-S_2\leqslant P(A_1+A_2+\cdots+A_m)\leqslant S_1 \tag{1.10}$$

下面讨论实验后计算概率的贝叶斯（Bayes）公式。

贝叶斯公式：设事件 B 能且只能与互不相容事件 A_1，A_2，…，A_m 之一同时发生，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)} \tag{1.11}$$

因此

$$P(B)P(A_i|B)=P(A_i)P(B|A_i)$$

又

$$B=BA_1+BA_2+\cdots+BA_m$$

$$P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_m)$$

$$=\sum_j P(BA_j)$$

$$=\sum_j P(A_j)P(B|A_j)$$

故

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}$$

例 有1号2号两台炮，它们向同一目标发射。若在1号炮射9次时间内，2号炮射10次。又1号炮平均10发中8发，2号炮平均10发中7发。在一次试射中有一发炮命中目标，但不知是那一台炮发射的，问由2号炮发射的概率是多少？

以A_i表i号炮发射事件，根据两台炮在同时间内发射的次数，可取

$$P(A_1)=0.9P(A_2)$$

又以B表炮命中目标事件，则

$$P(B|A_1)=0.8$$

$$P(B|A_2)=0.7$$

由贝叶斯公式，所求概率为

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}$$

$$=\frac{P(A_2)\times 0.7}{0.9P(A_2)\times 0.8+P(A_2)\times 0.7}$$

$$=0.493$$

第二章 矩　　阵

第一节 矩阵概念

矩阵是由多个数排成的一个表。在误差分析中，我们经常要分析多个误差，这就需要矩阵。在近代自然科学和社会科学中，矩阵得到了广泛的应用。

$n\times m$ 个数 a_{ij} 排成的矩形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix}$$

称为矩阵，记为 $A=(a_{ij})=(a_{ij})_{nm}$，nm 称为 A 的阶，a_{ij}称为 A 的元素。矩阵的横排称为行，纵排称为列。需表明阶时，矩阵 A 写成 $\underset{nm}{A}$。

$n=m$ 的矩阵称为方阵。此时，a_{11}，a_{12}，…，a_{nn} 称为方阵的主对角元素，主对角元素的连线称为主对角线。

$m=1$ 的矩阵称为列向量，如列向量

$$A=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

$n=1$ 的矩阵称为行向量，如行向量

$$A=(x_1,\ x_2,\ \cdot,\ x_m)$$

将 A 的行列互换，所得矩阵称为 A 的转置矩阵 A'，即

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix}'$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ji})_{mn}$$

如列向量的转置为行向量，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}' = (x_1,\ x_2,\ \cdot,\ x_n)$$

主对角线一侧元素全为 0（其余元素不为 0 或不全为 0）的方阵称为三角阵。下侧元素全为 0 的称为上三角阵，如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

上侧元素全为 0 的称为下三角阵，如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$a_{ii}>0$ 的三角阵称为正线三角阵。

所有非 0 元素都分布在主对角线带宽内的方阵称为带状方阵，如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

其左面半带宽为2 (如 a_{21}，a_{22} 为2个)，右面半带宽为3(最宽者 a_{22}，a_{23}，a_{24} 为3个)。

除主对角元素外，其余元素均为0的方阵称为对角阵，即

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdot, d_n)$$

主对角线元素皆为1的对角阵称为单位阵，即

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I$$

为简洁起见，对角阵与单位阵中主对角线外的0亦可不写。

一切元素皆为0的矩阵，称为零矩阵，记为**0**。

一切元素皆为1的矩阵，称为全1矩阵，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & 1 \end{pmatrix} = J$$

一切元素皆为1的列向量

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cdot & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

第 i 行元素为 1，其余元素为 0 的列向量称为顺列向量 $I_{(i)}$，即

$$\text{第}\,i\,\text{行} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = I_{(i)}$$

第二节　方阵的行列式

方阵 A 的行列式是由 A 所定义的一个数，记为 $\det A$ 或 $|A|$。

1×1阶方阵(a)的行列式定义为 a，即

$$\det(a)=a$$

将 $n\times n$ 阶方阵 $\underset{nn}{A}$（亦简称 n 阶方阵 $\underset{n}{A}$）中 i 行 j 列划去，余下的$(n-1)\times(n-1)$阶方阵记为 M，称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\det M$$

为 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

方阵 A 的行列式定义为

$$\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \tag{2.1}$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

行列式具有如下性质[3]。

性质 1 $\det A = \det A'$。

性质 2 若 A 的某行（或列）元素全为 0，则 $\det A = 0$。

性质 3 行列式任一行（或列）各元素均乘以 α，则行列式亦乘 α。

性质 4 某行（或列）元素为二项之和，则行列式可分为二行列式之和。

性质 5 某行（或列）元素同乘一数加到另一行（或列）后，行列式不变。

性质 6 交换任两行（或列），行列式变号。

性质 7 两行（或列）相同的行列式为零。

性质 8 三角阵的行列式等于主对角元素之积，即

$$
\det\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
= a_{11}a_{12}\cdots a_{nn} \tag{2.2}
$$

于是

$$
\det\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \tag{2.3}
$$

$$\det I = 1 \tag{2.4}$$

性质 9

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} &= \det A, \quad 当\ i=k \\ &= 0, \quad 当\ i \neq k\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} &= \det A, \quad 当\ j=k \\ &= 0, \quad 当\ j \neq k\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

性质10(拉伯拉斯定理) 在行列式$|A|$中任选k行，则含于此k行中所有k阶子式与其代数余子式乘积之和为$|A|$。

所谓k阶子式及其代数余子式意义为：由A中任选第i_1行，第i_2行，…，第i_k行及第j_1列，第j_2列，…，第j_k列，则行列相交处按原有相对位置所排成的k阶行列式M叫A的k阶子式；又在A中将这k行k列划去所得子式N叫M的余子式，而$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$叫$M$的代数余子式。

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

第三节 矩阵运算

一、相等及最简运算

相等 若 A, B 同阶，则 $A=B$ 指 $a_{ij}=b_{ij}$.

加法 若 A, B 同阶，则 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$.

减法 若 A, B 同阶，则 $A-B=(a_{ij}-b_{ij})$.

数积 一个数 α 与 A 乘为 $\alpha A=A\alpha=(\alpha a_{ij})$.

例 1

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

二、乘法

两矩阵相乘指

$\underset{np}{A}\ \underset{pm}{B}=\underset{nm}{C}=(c_{ij})$

$$
=\begin{pmatrix}
\sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2} & \cdot & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{km} \\
\sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k2} & \cdot & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{km} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sum_{k=1}^{p} a_{nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{nk}b_{k2} & \cdot & \sum_{k=1}^{p} a_{nk}b_{km}
\end{pmatrix}
$$

例 2

$$
(1,\ 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\times 3 + 2\times 4 = 11
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2 \\ 9 & 9 & 5 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & p_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} p_1a_{11} & p_1a_{12} & \cdot \\ p_2a_{21} & p_2a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_na_{n1} & p_na_{n2} & \cdot \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & p_n \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}p_1 & a_{12}p_2 & \cdot & a_{1n}p_n \\ a_{21}p_1 & a_{22}p_2 & \cdot & a_{2n}p_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
$$

由矩阵相等及乘法定义，我们能将线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=l_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=l_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=l_n \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ l_n \end{pmatrix}$$

即

$$\underset{nn}{A}\ \underset{n1}{X}=\underset{n1}{L}$$

对两列向量

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

称

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X'Y$$

为 X, Y 的内积，记为(X, Y)。

若$(X, Y)=0$，则称 X, Y 正交，记为 $X\perp Y$。

我们称

$$\sqrt{(X,X)}=\sqrt{X'X}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

为 X 的范数，记为$\|X\|$。

三、求　逆

对方阵 A，若

$$AB=BA=I$$

则称 B 为 A 的逆阵，记为 $B=A^{-1}$。

有此逆的方阵称为非异方阵，A 有逆的充要条件是 $|A|\neq 0$。

由

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \cdot \\ b_{nj} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \tag{2.7}$$

即逆阵第 j 列可由上式解出，此时右端为顺列向量 $I_{(j)}$。

A^{-1} 亦可由下式算出

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A_{ij})' \tag{2.8}$$

其中 A_{ij} 为 A 中 a_{ij} 代数余子式，这因

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdot \\ A_{12} & A_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdot \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \cdot & \\ & & & |A| \end{pmatrix}
$$

即 $A\cdot\frac{1}{|A|}(A_{ij})'=I$，同样知 $\frac{1}{|A|}(A_{ij})'\cdot A=I$，故有

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A_{ij})'$.

例 3

$$
\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & & \\ & d_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^{-1} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}'
$$

$$
= \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

四、初等变换与初等矩阵

下面对矩阵的三种演变，统称初等变换：

（Ⅰ） 用任意数 $a\neq0$ 去乘矩阵的第 i 行（列）；

（Ⅱ） 把矩阵的第 i 行（列）的 μ 倍加于第 j 行(列)；

（Ⅲ） 互换矩阵的第 i，第 j 两行(列)。

下面三种方阵统称初等矩阵：

（Ⅰ） 用任意数 $\alpha\neq 0$ 去乘Ⅰ的第 i 行(列)而得的矩阵

$$D_i(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

（Ⅱ） 把Ⅰ的第 i 行(列)的 μ 倍加于第 j 行(列)，而得的矩阵

$$E_{ji}(\mu)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & \mu & \cdot & 1 & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$E'_{ji}(\mu)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & 1 & \cdot & \mu & & \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ 第\ i\ 列 & & 第\ j\ 列 \end{matrix}$$

（Ⅲ） 互换 I 的第 i，第 j 两行(列)而得的矩阵

$$C_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & 0 & \cdot & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & 1 & \cdot & 0 & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

↑第 i 列　↑第 j 列

性质 1　对矩阵 A 的行(列)作初等变换，恰等于用同种初等矩阵去左(右)乘 A。

如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \mu+3 & 2\mu+4 \end{pmatrix}$$

性质 2　任何初等矩阵均有逆，其逆为同种初等矩阵。

事实上，将(Ⅰ)种初等矩阵中 α 换以 $\frac{1}{\alpha}$，(Ⅱ)种初等矩阵中 μ 换以 $-\mu$，(Ⅲ)种初等矩阵不变，即得它们的逆。

性质 3　(Ⅲ)种初等变换可由(Ⅰ)、(Ⅱ)种表示。

此因　$C_{ij}=D_i(-1)E_{ij}(-1)E_{ji}(1)E_{ij}(-1)$

性质 4　非异方阵可表为初等矩阵之积。

五、运 算 律

1. $A+B=B+A$，$(A+B)+C=A+(B+C)$
2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$，$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

3. $(AB)C=A(BC)$, $\alpha(AB)=(\alpha A)B$

4. $(A+B)C=AC+BC$, $A(B+C)=AB+AC$

证　今证$(A+B)C=AC+BC$，此因

$$(左)_{ij}=\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{p}b_{ik}c_{kj}$$

$$=(右)_{ij}$$

5. $AI=IA=A$

6. $(AB)'=B'A'$, $(A+B)'=A'+B'$, $(A')'=A$, $(\alpha A)'=\alpha A'$

证　今证 $(AB)'=B'A'$，因 $(AB)'$ 之 i 行 j 列元素为$\sum_k a_{jk}b_{ki}$，又 $B'A'$之 i 行 j 列元素为 $\sum_k b'_{ik}a'_{kj}=\sum_k b_{ki}a_{jk}$ $=\sum_k a_{jk}b_{ki}$与$(AB)'$之i行j列元素相同。

7 $(A^{-1})^{-1}=A$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, $I^{-1}=I$, $(A^{-1})'=(A')^{-1}$

证　因$AA^{-1}=A^{-1}A=I$，视A^{-1}为原阵，知A为其逆阵，而$(A^{-1})^{-1}=A$。

又因$AB(B^{-1}A^{-1})=AA^{-1}=I$, $(B^{-1}A^{-1})AB=B^{-1}B=I$；故$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

由对角阵之逆，知$I^{-1}=I$。

因$A'(A^{-1})'=(A^{-1}A)'=I$，$(A^{-1})'A'=(AA^{-1})'=I$，故$(A')^{-1}=(A^{-1})'$。

8. 通常不成立$AB=BA$。

例4　当

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

则AB可乘，但BA不可乘。又当

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\neq BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

即 AB 与 BA 皆可乘，但两者也可以不等，故通常不成立$AB=BA$。

由例又可见两非零阵之积可为零阵。但又有

性质 1 若$ABC=0$且A，C为非异方阵，则$B=0$。

证 对$ABC=0$两端左乘A^{-1}，右乘C^{-1}，得证。

性质 2 若$A'A=0$，则$A=0$。

证 若$A=(a_{ij})$，则$A'A$的主对角元素为$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2=0$，故必$a_{ij}=0$。

9. 下三角阵、上三角阵、对角阵各自的和、数积、积、逆仍为同类阵。且其主对角元素为原各阵相应主对角元素之和、数积、积、逆。

10. $\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}$

11. 柯西公式[8]

$$|\underset{nm}{V}\ \underset{mn}{U}|=\begin{cases}0 & \text{当}m<n\\ |V||U| & \text{当}m=n\\ \sum\limits_{(\mu)}\text{式}_U\left\{\underline{\mu_1,\cdots,\mu_n}\right\}\text{式}_V\left\{\overline{\mu_1,\cdots,\mu_n}\right\}, & \text{当}m>n\end{cases}$$

其中 式$_U\left\{\dfrac{\mu_1,\cdots,\mu_n}{}\right\}$为$U$ 中取第 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 行作成的行列式，

式$_V\left\{\dfrac{}{\mu_1,\cdots,\mu_n}\right\}$为$V$中取第 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 列作成的行列式，$\sum\limits_{(\mu)}$为对所有可能的$\mu_1,\cdots,\mu_n$求和。

例 5

$$\left|\begin{pmatrix} x_1 & \cdot & x_m \\ y_1 & \cdot & y_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot \\ x_m & y_m \end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}+\cdots$$

$$=\sum_{i<j}(x_iy_j-x_jy_i)^2$$

例 6 当$n>m$时

$$|A'A|_{nm}=\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mm} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdot & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\ a_{1m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdot\ a_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{(m+1)1} & a_{(m+1)2} & \cdot\ a_{(m+1)m} \end{vmatrix}$$

$$
\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & \cdot & a_{(m+1)1} \\ a_{12} & a_{32} & \cdot & a_{(m+1)2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{3m} & \cdot & a_{(m+1)m} \end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots
$$

因A'为A转置，故右端每项中两因子相等，于是

$$
|A'A| = \Sigma M_m^2
$$

$$
= A\text{所有 } m \text{ 阶子行列式} M_m \text{ 的平方和}
$$

利用本节所述，可以求解线性方程组。

例 7 求解

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}
$$

因

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}
$$

故

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}
$$

因

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

于是

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

第四节　矩阵分块

为充分利用各部分性质，对高阶阵可用纵横线将其分为若干低阶阵，如

$$D=\left(\begin{array}{c|cc} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ \hline d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

而 $\qquad D_{11}=d_{11},\ D_{12}=(d_{12},\ d_{13})$

$$D_{21}=\begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix},\ D_{22}=\begin{pmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

矩阵分块后可以进行运算。

一、加法与乘法

若同阶阵C, D用同法分块（C_{ij}, D_{ij}同阶），则可分块加。如

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

则

$$C+D=\begin{pmatrix} C_{11}+D_{11} & C_{12}+D_{12} \\ C_{21}+D_{21} & C_{22}+D_{22} \end{pmatrix}$$

若两可乘阵C, D可分为

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdot & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdot & C_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdot & C_{mn} \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdot & D_{1t} \\ D_{21} & D_{22} & \cdot & D_{2t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdot & D_{nt} \end{pmatrix}$$

而C_{ij}的列等于D_{jk}的行($i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n; k=1,\cdots,t$)，则可由分块乘得

$$CD=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdot & U_{1t} \\ U_{21} & U_{22} & \cdot & U_{2t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_{m1} & U_{m2} & & U_{mt} \end{pmatrix}$$

其中$U_{ik}=C_{i1}D_{1k}+\cdots+C_{in}D_{nk}$

下面列出一些分块乘法结果。

A_{mp}	B_{pn}	AB
p_1列 p_2列 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1行 \\ m_2行 \end{matrix}$	n_1列 n_2列 $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} p_1行 \\ p_2行 \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$
A	$(B_1 \quad B_2)$	$(AB_1 \quad AB_2)$
$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$	B	$\begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B \end{pmatrix}$
p_1列 p_2列 $(A_1 \quad A_2)$	$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\begin{matrix} p_1行 \\ p_2行 \end{matrix}$	$(A_1B_1+A_2B_2)$
$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$	$(B_1 \quad B_2)$	$\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix}$

例

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 4 & 3 \\ \hdashline -2 & 2 & 5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:cc} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ \hdashline 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$
=\begin{pmatrix} (1,4)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+(3)(3) & (1,4)\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+(3)(0,2) \\ (-2,2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+(5)(3) & (-2,2)\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+(5)(0,2) \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 15 & 11 & 14 \\ 13 & 8 & 4 \end{pmatrix}
$$

二、转置与一些阵

分块阵之转置为

$$
\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} P' & R' \\ Q' & S' \end{pmatrix}
$$

准对角阵指

若两准对角阵同样分块为

$$
A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix}
$$

则

$$
A+B=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n+B_n \end{pmatrix}
$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_nB_n \end{pmatrix}$$

若A_i可求逆，则

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix}$$

三角块阵之行列式

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & A_{rr} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

$$=\det A_{11}\det A_{22}\cdots\det A_{rr}$$

三、逆　　阵

当A_{11}及$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$为非异方阵时

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

当A_{22}及$A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$为非异方阵时

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A_{11}+A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & A_{22}^{-1}+A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

若 A 及 A_{11}，A_{22} 为非异方阵，上两式右端对应块阵相等。

特别有

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

若下各式右端中各逆阵存在时，则[4]

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+FE^{-1}F' & -FE^{-1} \\ -E^{-1}F' & E^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

其中A，D对称，且

$$E=D-B'A^{-1}B$$

$$F=A^{-1}B$$

且

$$(A+BC')^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(I+C'A^{-1}B)^{-1}C'A^{-1} \tag{2.13}$$

$$(A+UV')^{-1}=A^{-1}-\frac{(A^{-1}U)(V'A^{-1})}{1+V'A^{-1}U} \tag{2.14}$$

后一式称为一秩校正式。

当矩阵含许多零元素时，分块运算方便，如求 A，B 之积，而

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc|cc}1&2&&&&\\2&1&&&&\\\hline &&2&1&&\\&&1&3&&\\\hline &&&&3&2\\&&&&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&&\\&A_2&\\&&A_3\end{pmatrix}$$

$$B=\left(\begin{array}{c}1\\2\\\hline 1\\3\\\hline 2\\1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}A_1&&\\&A_2&\\&&A_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1\\A_2B_2\\A_3B_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\5\\10\\8\\5\end{pmatrix}$$

第五节　矩阵解析

一、矩阵导数与积分

若矩阵A的元素a_{ij}为单变量x的函数，则A的导数与积

分仍为一个矩阵，它们的元素为

$$\left(\frac{dA}{dx}\right)_{ij}=\frac{da_{ij}}{dx},\quad \left(\int A dx\right)_{ij}=\int a_{ij}dx$$

二、 行向量对列向量导数

若

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix},\quad V'=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

其中v_i为X的函数。

我们定义[4]

$$\frac{\partial V'}{\partial X}=\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_t} & \frac{\partial v_2}{\partial x_t} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_t} \end{pmatrix}$$

若V'为一维向量y，则

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_t} \end{pmatrix}$$

运算律:

1. $\frac{\partial}{\partial X}(X'X)=2X$

证 因

$$X'X=\Sigma x_i^2$$

$$\frac{\partial}{\partial X}(X'X)=\frac{\partial}{\partial X}(\Sigma x_i^2)$$

$$=\begin{pmatrix}2x_1\\ \cdot\\ 2x_t\end{pmatrix}=2X$$

2 $\frac{\partial}{\partial X}(V'V)=2\left(\frac{\partial V'}{\partial X}\right)V$

证 因

$$V'V=\Sigma v_i^2$$

$$\frac{\partial}{\partial X}(V'V)=\begin{pmatrix}2v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\cdots+2v_n\frac{\partial v_n}{\partial x_1}\\ \cdot\\ 2v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_t}+\cdots+2v_n\frac{\partial v_n}{\partial x_t}\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial v_n}{\partial x_1}\\ \cdot & \cdot & \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_t} & \cdot & \frac{\partial v_n}{\partial x_t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ \\ v_n\end{pmatrix}=2\left(\frac{\partial V'}{\partial X}\right)V$$

3. $\frac{\partial}{\partial X}X'=I$

证

$$\frac{\partial}{\partial X}X'=\frac{\partial}{\partial X}(x_1,\cdot,x_t)$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial x_t}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_t} & \cdot & \frac{\partial x_t}{\partial x_t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}=I$$

4. $\frac{\partial}{\partial X}(X'A)=A$，其中$A$为常量阵。

证

$$\frac{\partial}{\partial X}(X'A)=\frac{\partial}{\partial X}(a_{11}x_1+\cdots+a_{t1}x_t,\cdot,a_{1n}x_1+\cdots+a_{tn}x_t)$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ & & \\ a_{t1} & \cdot & a_{tn} \end{pmatrix}=A$$

5. $\frac{\partial}{\partial X}(X'AX)=2AX$，其中$A$为常量对称阵。

6. $\frac{\partial}{\partial X}C=0$，其中$C$为常量列向量。

7. $\frac{\partial}{\partial X}(C'X)=C$，其中$C$为常量列向量。

8. $\frac{\partial}{\partial X}(V'+W')=\frac{\partial V'}{\partial X}+\frac{\partial W'}{\partial X}$

9. $\frac{\partial}{\partial X}(V'C)=\left(\frac{\partial V'}{\partial X}\right)C$，其中$C$为常量阵。

10. $\frac{\partial}{\partial X}(V'W)=\left(\frac{\partial V'}{\partial X}\right)W+\left(\frac{\partial W'}{\partial X}\right)V$

11. $\frac{\partial}{\partial X}(V'CV)=2\left(\frac{\partial V'}{\partial X}\right)CV$，其中 C 为常量对称

阵。

12. $\frac{\partial}{\partial X}(X'CV)=2CV$，其中$C$为常量对称阵。

三、列向量对行向量的导数

若

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

则定义

$$\frac{dY}{dX}=\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_p}{\partial x_q} \end{pmatrix}$$

特别当Y为一维列向量y，则

$$\frac{dy}{dX}=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial y}{\partial x_q}\right)$$

显然

$$\frac{dY}{dX}=\left(\frac{\partial Y'}{\partial X}\right)',\quad \frac{dy}{dX}=\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)'$$

运算律

1. $\frac{dC}{dX}=0$，其中C为常量列向量。

2. $\frac{dX}{dX}=I$

3. $\frac{d}{dX}(Y+Z)=\frac{dY}{dX}+\frac{dZ}{dX}$

4. $\frac{d}{dX}(CX)=C$，其中C为常量阵。

5. $\frac{d}{dX}(CY)=C\frac{dY}{dX}$，其中$C$为常量阵。

6. $\frac{d}{dX}(\underset{1p}{Y'}\underset{p1}{Z})=Y'\frac{dZ}{dX}+Z'\frac{dY}{dX}$

7. $\frac{d}{dX}(Y'AY)=2Y'A\frac{dY}{dX}$，其中$A$为常量对称阵，$Y$为$p\times 1$阶阵。

四、二 阶 导 数

若f为X标量函数，而

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix}$$

且$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$连续而与求导次序无关。则定义

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_t} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^2} \end{pmatrix}$$

显然

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}=\frac{d}{dX}\frac{\partial f}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial X}\frac{df}{dX}$$

运算律

1. $\frac{\partial^2}{\partial X^2}(C'X)=0$，且$\frac{\partial^2}{\partial X^2}(X'C)=0$，其中 C 为常量列向量

2. $\frac{\partial^2}{\partial X^2}(X'X)=2I$

3. $\frac{\partial^2}{\partial X^2}(X'AX)=2A$，其中$A$为常量对称阵

4. $\frac{\partial^2}{\partial X^2}(V'X)=\frac{\partial V'}{\partial X}$，其中$V$与$X$无关。

第六节 矩阵的秩和迹

矩阵A中不等于零的子行列式的最大阶数，称为A的**秩**，记为$R(A)$或$rk(A)$。

方阵A主对角元素之和，称为A的迹，记为 $\mathrm{tr}(A)$。

例 1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

因A的所有三阶行列式为零，但

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

故$R(A)=2$。

例 2

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=1+4=5$$

方阵的秩等于其阶的，称为满秩方阵，或简称满秩阵。显然，满秩方阵为非异方阵，非异方阵为满秩方阵。

行大于或等于列的矩阵，称为高阵。秩等于列的高阵，称为列满秩高阵。

列大于或等于行的矩阵，称为低阵。秩等于行的低阵，称为行满秩低阵。

例 3 对方阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

因$|A|=-2\neq 0$，故 $R(A)=2$与A 的阶相同，故A为满秩方阵。

例 4 对高阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

因$R(A)=2$与A的列数相同，故A为列满秩高阵。

下面讨论矩阵秩和迹的性质。

性质 1 若A的秩为r，则存在r个线性独立的行（列）向量，其余行（列）可由它们线性组合表示。

性质 2 $R(AB)\leqslant \min(R(A), R(B))$

证 因若 $\underset{ml}{A}\ \underset{ln}{B}=C$，则$C$的第$i$行为

$$(c_{i1},\cdot,c_{in})=(\sum_k a_{ik}b_{k1},\cdot,\sum_k a_{ik}b_{kn})$$

$$=a_{i1}(b_{11},\cdot,b_{1n})+\cdots+a_{il}(b_{l1},\cdot,b_{ln})$$

即AB线性独立行数小于或等于B线性独立的行数。又由

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \cdot \\ c_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} b_{1j} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1l} \\ \\ a_{ml} \end{pmatrix} b_{lj}$$

即 AB 线性独立列数小于或等于 A 线性独立列数，于是得证。

性质 3 当A为非异方阵，则

$$R(AB)=R(BA)=R(B)$$

证 设 $AB=P$，则 $R(P)\leqslant R(B)$，又 $B=A^{-1}P$，故 $R(B)\leqslant R(P)$，结合两式得证。

性质 4 当V为列向量，则

$$\mathrm{tr}(V'V)=\mathrm{tr}(VV')=\Sigma v_i^2$$

性质 5 $tr(AB)=tr(BA)$

证 设A为nm阶，B为mn阶，则因

$$tr(AB)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ji}b_{ij}=\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}b_{lk}a_{kl}=\mathrm{tr}\,(BA)，得证。$$

性质 6 $\mathrm{tr}(\alpha A)=\alpha\mathrm{tr}(A)$，其中$\alpha$为数。

性质 7 $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$

性质 8 $R(A'A)=R(A)$

证 设$\underset{nm}{A'A}=C$，则$|A'A|=\Sigma M_m^2$而M_m代表 A 的 m阶子行列式（$n<m$时M_m作0）。

$A'A$的p阶主子阵（行序号同列序号）由A'的 p 行及A的相应p列代替$C=A'A$右端A'及A作成。由柯西公式可求C的p阶主子式M_p，设$R(A)=r$，则$p>r$时$M_p=0$，当$p\leqslant r$时，由$|A'A|=\Sigma M_m^2$可见$M_p\geqslant 0$且定有大于0者，故从 C 的主子式看 $R(C)=R(A)$，再从非主子式看 $R(C)\geqslant R(A)$。但 $R(C)\leqslant R(A)$，得证。

性质 9 对列满秩高阵$\underset{mr}{G}$，有列满秩高阵$\underset{m(m-r)}{H}$，使(G,H)为非异方阵。

证 将G按行向量g_i写为

$$G=\begin{pmatrix} g_1 \\ \cdot \\ g_m \end{pmatrix}$$

则有r个g_i可形成非异方阵，可设为前r个，作

$$H=\begin{pmatrix} \underset{r(m-r)}{0} \\ \underset{(m-r)(m-r)}{I} \end{pmatrix}$$

因$det(G,H)$按拉伯拉斯定理，由H列展开为

$$\pm|I|\cdot\begin{vmatrix} g_1 \\ \cdot \\ g_r \end{vmatrix}$$

非零，故(G,H)为非异方阵。

性质10 对列满秩高阵$\underset{mr}{G}$，有列满秩高阵$\underset{mr}{K}$及$\underset{m(m-r)}{N}$使$K'G=I$，$N'G=0$。

证 对G配H使(G,H)为非异方阵，令

$$(G,H)^{-1}=\begin{pmatrix} K' \\ N' \end{pmatrix}$$

则K'为rm阶行满秩低阵（否则某行可由其余行表示而右端方阵降秩），N'为$(m-r)m$阶行满秩低阵。因

$$\begin{pmatrix} K' \\ N' \end{pmatrix}(G,H)=\begin{pmatrix} K'G & K'H \\ N'G & N'H \end{pmatrix}=\underset{mm}{I}=\begin{pmatrix} \underset{r}{I} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

故

$$K'G=I, \ N'G=0.$$

性质11 若G，H为列满秩高阵，则

$R(GAH')=R(A)$。即列满秩高阵左乘，行满秩低阵右乘后不变原矩阵之秩。

证 令 $B=GAH'$，则$R(B)\leqslant R(A)$。因可找到K，L使$K'G=I$，$L'H=I$，于是

$$K'BL=K'GAH'L=IAI=A$$

故 $R(A)\leqslant R(B)$，得证。

性质12 设$\underset{mn}{A}$秩为r，则存在非异方阵$\underset{mm}{B}$，$\underset{nn}{C}$，使

$$BAC=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证 将A的独立列选出，将其余列约化掉（相当于右乘一些初等矩阵）。

再将A的独立行选出，将其余行约化掉（相当于左乘一些初等矩阵）。

将所得rr阶块阵化为单位阵，再移至左上角。

以上初等变换对应初等矩阵之积即B与C。

性质13 若$R(\underset{mn}{A})=r$，则$A=B_1C_1$，而$R(\underset{mr}{B_1})=r$，$R(\underset{rn}{C_1})=r$。

证

$$A=\underset{mm}{B^{-1}}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underset{nn}{C^{-1}}=B^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}C^{-1}=\underset{mr}{B_1}\ \underset{rn}{C_1}$$

这种将A写为$A=B_1C_1$的分解，称为A的秩因子分解。

性质14 $R(A+B)\leqslant R(A)+R(B)$

证 由秩因子分解

$$A=GH',\quad B=G_1H_1'$$

而

$$A+B=(G,G_1)\begin{pmatrix}H'\\H_1'\end{pmatrix}$$

$$R(A+B)\leqslant R(G,G_1)\leqslant R(A)+R(B)$$

性质15 $R(A-B)\geqslant R(A)-R(B)$

证 取 $A=(A-B)+B$，由性质14可证。

性质16 $R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-B$的行数

证 若A为mn阶，B为np阶，作秩因子分解$A=\underset{mr}{G}\ \underset{rn}{H'}$，对$H$配成非异方阵$(\underset{nr}{H},\ \underset{n(n-r)}{H_1})$则

$$R(AB)=R(GH'B)=R(H'B)=R\begin{pmatrix}H'B\\0\end{pmatrix}=R\left(\begin{pmatrix}H'\\H_1'\end{pmatrix}\cdot B-\begin{pmatrix}0'\\H_1'B\end{pmatrix}\right)\geqslant R\left(\begin{pmatrix}H'\\H_1'\end{pmatrix}B\right)-R(H_1'B)=R(B)$$

$$-R(H_1'B)\geqslant R(B)-R(H_1')=R(B)-(n-r)$$

$=R(B)+R(A)-B$的行数

性质17 $R(ABC)\geqslant R(AB)+R(BC)-R(B)$

证 对B作秩因子分解$B=GH'$，则

$R(B)=H'$行数$=H'C$行数

$R(ABC)=R(AGH'C)\geqslant R(AG)+R(H'C)-H'C$行数

$$=R(AGH')+R(GH'C)-R(B)$$

$$=R(AB)+R(BC)-R(B)$$

第七节　方阵的特征根

对方阵$\underset{n}{A}$，$f(\lambda)=|\lambda I-A|$叫A的特征多项式，而

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdot & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdot & -a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ -a_{n1} & -a_{n2} & & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$f(\lambda)$ 的根叫A的特征根。特征根的集合叫谱，$\max|\lambda_i|$叫A的谱半径$\rho(A)$。

对特征根λ_1，满足$\lambda_1 X=AX$的非0向量X叫做A属于λ_1的特征向量。

例 1

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

由

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda=0$$

解得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$。

对$\lambda_1=1$，由

$$1\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

知

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

为其特征向量。

对 $\lambda_2=0$，同样知 $X=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$为其特征向量。

性质 1 若X为特征向量，αX亦为特征向量，而α为常数。

性质 2 （凯来-哈米尔顿定理）A满足特征方程$f(A)=0$[3]。

例 2 对下面矩阵A验证性质2

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}$$

因特征方程

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2\\1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+14=0$$

只须验证$A^2-7A+14I=0$，此式成立因

$$A^2-7A+14I$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}+14\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

定义 若P为非异方阵，则$B=P^{-1}AP$称A的相似变换。

性质 相似变换不改变特征根。

证 $f_B(\lambda)=|P^{-1}AP-\lambda I|=|P^{-1}(A-\lambda I)P|$

$$=|P^{-1}||A-\lambda I||P|$$

$$=|A-\lambda I|$$

$$=f_A(\lambda)$$

故两阵特征多项式相同，从而特征根相同。

第八节　对称阵幂等阵和正交阵

定义1　若方阵$A=A'$，则称A为对称阵。

定义2　若方阵$A=-A'$，则称A为反对称阵。

若干个A连乘，可用A的幂表示，即k个A相乘可写作A^k，如$AA=A^2$，$AAA=A^3$。

定义3　若方阵$A=A^2$，则称A为幂等阵。

定义4　若方阵A满足$AA'=I$，则称A为正交阵。

例1　对称阵

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 20 \end{pmatrix}$$

例2　平面坐标轴旋转角度θ后，新旧坐标间成立关系

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

而

$$T=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

为正交阵。

例3　赫尔默特（Helmert）阵C为正交阵。C_n作法为：第一行($n^{-1/2}$, $n^{-1/2}$, ·, $n^{-1/2}$)，第j行(d_j, d_j, ·, d_j, $-(j-1)d_j$, 0, ·, 0)，其中$d_j=\left(\frac{1}{j(j-1)}\right)^{1/2}$重复$j-1$次。如

$$\underset{2}{C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2\times1}} & \frac{-1}{\sqrt{2\times1}}\end{pmatrix},\quad \underset{3}{C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2\times1}} & \frac{-1}{\sqrt{2\times1}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3\times2}} & \frac{1}{\sqrt{3\times2}} & \frac{-2}{\sqrt{3\times2}}\end{pmatrix}$$

例4 幂等阵

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

例5 中心化阵$\underset{n}{H}=\underset{n}{I}-\frac{1}{n}\underset{n}{J}$为幂等对称阵。如

$$\underset{2}{H}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \underset{n}{H}=\begin{pmatrix}\frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdot & -\frac{1}{n}\\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdot & -\frac{1}{n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdot & \frac{n-1}{n}\end{pmatrix}$$

性质1 任一方阵可表为对称阵与反对称阵之和。

证 因

$$A=\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}$$

性质2 若A正交，则$A^{-1}=A'$；反之，若 $A^{-1}=A'$ 则A

正交。

证　因$I=AA'$，两端乘A^{-1}，得$A^{-1}=A^{-1}AA'=A'$。又若$A^{-1}=A'$，则$AA'=AA^{-1}=I$，故A正交。

性质3　若A正交，则A'与A^{-1}也正交。

证　因A正交，故$A'=A^{-1}$，$(A')(A')'=A^{-1}A=I$，故A'正交。又$(A^{-1})(A^{-1})'=(A'A)^{-1}=I$，从而$A^{-1}$亦正交。

性质4　若A正交，B正交，则AB正交。

证　因

$$(AB)(AB)'=ABB'A'=AIA'=AA'=I$$

性质5　A正交的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj}=\begin{cases}1, & 当\ i=k\\ 0, & 当\ i\neq k\end{cases}$$

或

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}a_{jk}=\begin{cases}1, & 当\ i=k\\ 0, & 当\ i\neq k\end{cases}$$

证　由$AA'=I$及$A'A=I$展开得证。

这一性质表明正交阵任二列（行）正交，且各列（行）向量范数等于1。

范数为1的向量称为标准向量。

对任一线性独立列向量系$a_1,a_2,\cdots,a_n$可以化为标准正交列向量系$c_1,c_2\cdots,c_n$(即$\|c_i\|=1$，$c_i\perp c_j$)，其法如下：

第一步：取$b_1=a_1$，又$b_i^{(1)}=a_i-\dfrac{(a_i,b_1)}{\|b_1\|^2}b_1$，$i=2,\cdots,n$，则$b_1$与$b_2^{(1)},\cdots,b_n^{(1)}$正交；

第二步：取$b_2=b_2^{(1)}$，又$b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-\dfrac{(b_i^{(1)},b_2)}{\|b_2\|^2}b_2$，$i=3,\cdots,n$，则$b_1$，$b_2$与$b_3^{(2)},\cdots,b_n^{(2)}$正交。

如此下去，即得 $b_1,\cdots,b_n$，其中任两向量正交。取 $c_i=b_i/\|b_i\|$，即得 $c_1,\cdots,c_n$，其各自范数为1，且任两向量正交。

性质6 标准正交列向量系形成的高阵 G 必为列满秩高阵，且可找到列满秩高阵N，使(N,G)为正交阵。

证 对标准正交列向量系形成的高阵$\underset{nr}{G}$，因$G'G=I$，故

$R(G)=R(G'G)=R(\underset{r}{I})=r$，于是$G$列满秩。

对G找列满秩高阵N，使$N'G=0$；然后对N各列标准正交化，则(N,G)为正交阵。

性质7 若 A 正交，则$|A|=\pm1$，A 非异且各列线性独立。

证 因 $|AA'|=|I|=1$，故$|A|\ |A'|=|A|^2=1$，于是$|A|=\pm1$，而 A 为非异方阵即满秩方阵，故 A 各列线性独立。

性质8 当上三角阵为正交阵时，它必为单位阵。

证 由性质5可得。

性质9 若A对称，则 A^{-1}对称。

证 因$(A^{-1})'=(A')^{-1}=A^{-1}$。

性质10 若A对称，总能找到正交阵C，使$C'AC$为对角阵，且主对角元素恰为A的全部特征根。

证 记A特征根为λ，当X_1为与 λ_1 对应特征向量，并设它已标准化，即$\|X_1\|=1$，记$X_1=q_1$，找出别的q_i使有正交阵

$$Q_0=(q_1,\cdot,q_n)$$

则$Q_0'AQ_0=(q_i'Aq_j)$，其第一列元素为

$$q_i'Aq_1,\quad i=1,2,\cdots,n$$

由于$Aq_1=\lambda_1q_1$，所以

$$q_i' A q_1 = \lambda_1 q_i' q_1 = \begin{cases} \lambda_1, & \text{当} i=1 \\ 0, & \text{当} i=2,\cdots,n \end{cases}$$

再由$Q_0' A Q_0$对称，知

$$Q_0' A Q_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_1 \end{pmatrix}$$

其中A_1为$(n-1)(n-1)$阶。因

$$|\lambda I - Q_0' A Q_0| = \begin{vmatrix} \lambda-\lambda_1 & \\ & \lambda I_{n-1} - A_1 \end{vmatrix} = |\lambda-\lambda_1| \cdot |\lambda I - A_1|$$

故A的特征根即$Q_0' A Q_0 = Q_0^{-1} A Q_0$特征根为$\lambda_1$及$A_1$特征根，从而$A_1$特征根为$\lambda_2, \cdots, \lambda_n$。

再对A_1研究，知存在$(n-1)(n-1)$阶正交阵Q_1使

$$Q_1' A_1 Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$$

其中A_2为$(n-2)(n-2)$阶，它的特征根为$\lambda_3, \cdots, \lambda_n$.

于是存在正交阵$Q_2, Q_3, \cdots, Q_{n-2}$，它们分别为$(n-2)(n-2)$阶，$(n-3)(n-3)$阶，…，$2\times2$阶，并逐次把$(n-2)(n-2)$，$(n-3)(n-3)$，…，$2\times2$阶阵

$$A_2, A_3, \cdots, A_{n-2}$$

化为

$$Q_i' A_i Q_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i+1} & \\ & A_{i+1} \end{pmatrix}, \quad i=2,3,\cdots,n-2$$

矩阵A_{n-1}为一个数。令

$$Q = Q_0 \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & Q_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & Q_{n-2} \end{pmatrix}$$

则右端各阵为正交阵，从而Q为正交阵，且

$$Q'AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \cdot & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

此Q即所求C阵。

性质11 （实）对称阵$\underset{n}{A}$：(1)特征根是实的，(2)属于不同特征根的特征向量正交，(3) 存在几个彼此正交的标准特征向量，它们线性独立，以它们为列向量，可形成正交阵。

证　今证(1)。由$AX=\lambda X$，两端乘$\overline{X}'$（X的共轭$\overline{X}$再转置）得$\overline{X}'AX=\lambda\overline{X}'X$，两端取共轭，得$X'A\overline{X}=\overline{\lambda}X'\overline{X}$，再取转置得$\overline{X}'A'X=\overline{\lambda}\,\overline{X}'X$，于是$\overline{X}'AX=\overline{\lambda}\,\overline{X}'X$，$\overline{X}'\lambda X=\overline{\lambda}\,\overline{X}'X$，而

$$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{X}'X=0$$

特征向量非0，故$\overline{X}'X\neq 0$，而$\lambda=\overline{\lambda}$，于是$\lambda$为实数。

再证(2)。若λ_1，λ_2为两不等特征根，由

$$AX_1=\lambda_1X_1$$

得

$$\overline{X}_2'AX_1=\lambda_1\overline{X}_2'X_1$$
$$X_2'A\overline{X}_1=\lambda_1X_2'\overline{X}_1$$
$$\overline{X}_1'AX_2=\lambda_1\overline{X}_1'X_2$$

又因$AX_2=\lambda_2X_2$，从而

$$\overline{X}_1'AX_2=\lambda_2\overline{X}_1'X_2$$

比较两式，知$\lambda_1\overline{X}_1'X_2=\lambda_2\overline{X}_1'X_2$，从而

$$(\lambda_1-\lambda_2)\overline{X}_1'X_2=0$$

因$\lambda_1\neq\lambda_2$，故$\overline{X}_1'X_2=0$，从而X_1，X_2正交。

再证(3)。因对A，存在正交阵C，使

$$C'AC=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdot,\lambda_n)$$

故$AC=CA$，将C按列向量写为$C=(X_1, \cdot, X_n)$，则

$$A(X_1, \cdot, X_n)=(X_1, \cdot, X_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \cdot & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

而

$$AX_i=\lambda_i X_i$$

此$X_1,\cdots,X_n$即所求彼此正交的标准特征向量。因C满秩，故$X_1,\cdots,X_n$线性独立。

例6

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A的特征根为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$。将$\lambda_1=1$的特征向量标准化为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

将$\lambda_2=0$的特征向量标准化为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

由上述两向量作成正交阵

$$C=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

则有

$$C'AC=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

性质12 对幂等阵 $\underset{n}{A}$，成立(1) $R(A)=\mathrm{tr}(A)$，(2) $R(A)+R(I-A)=n$。

证 由秩因子分解

$$\underset{n}{A}=\underset{nr}{B}\ \underset{rn}{C}$$

其中$R(B)=R(C)=R(A)=r$。由 $A=A^2$ 故

$$BC\cdot BC=BC$$

$$(B'B)^{-1}B'\cdot BC\cdot BC\cdot C'(CC')^{-1}=(B'B)^{-1}B'\cdot BC\cdot C'(CC')^{-1}$$

$$CB=\underset{r}{I}$$

$$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(BC)=\mathrm{tr}(CB)=\mathrm{tr}(\underset{r}{I})=r$$

得证(1)。再证(2)

$$A(I-A)=0\Longrightarrow 0\geqslant R(A)+R(I-A)-n$$

$$A+(I-A)=I\Longrightarrow n\leqslant R(A)+R(I-A)$$

结合两式得证。

性质13 对幂等对称阵A，其特征根中$R(A)$个为1，其余为0。

证 因A对称，故有正交阵C使

$$C'AC=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdot,\lambda_n)$$

其中λ_i为A的特征根。但

$$C'AC\cdot C'AC=\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\cdot,\lambda_n^2)$$
$$=C'AIAC=C'AC=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdot,\lambda_n)$$

故λ_i为1或0，但$R(C'AC)=R(A)$，故λ_i为1个数为$R(A)$

个。

第九节 双线性型与二次型

本节讨论双线性型与二次型。

定义1 对列向量X与Y及矩阵$\underset{mn}{A}$，称

$$X'AY=\sum_{i,k}a_{ik}x_iy_k \tag{2.15}$$

为x_i与y_k的双线性型．若A为对称方阵，称

$$X'AX=\sum_{i,k}a_{ik}x_ix_k$$

$$=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{22}x_2^2+\cdots \tag{2.16}$$

为x_i的二次型。

例1 双线性型

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$=x_1y_1+2x_1y_2+3x_2y_1+4x_2y_2+5x_3y_1+6x_3y_2$$

二次型

$$(x_1,x_2)\begin{pmatrix}3&6\\6&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=3x_1^2+12x_1x_2+14x_2^2$$

例2 若$\underset{np}{A}\,\underset{pr}{B}\,\underset{rm}{C}=D$，将$A$按行，$B$按列写出

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\\cdot\\a_i\\\cdot\\a_n\end{pmatrix},\quad C=(c_{(1)},\cdot,c_{(j)},\cdot,c_{(m)})$$

则

$$d_{ij}=a_iBc_{(j)}$$

此因

$$d_{ij}=\sum_k (AB)_{ik}c_{kj}=\sum_k\Big(\sum_l a_{il}b_{lk}\Big)c_{kj}$$
$$=\sum_k\sum_l a_{il}b_{lk}c_{kj}=\sum_k\sum_l b_{lk}a_{il}c_{kj}=a_iBc_{(j)}$$

定义2 对任何非零向量X恒有 $X'AX>0$，则称二次型$X'AX$或A正定，A正定记为$A>0$。若对任何向量X，恒有$X'AX\geqslant0$，则称二次型$X'AX$或A非负定，A非负定记为$A\geqslant0$。

若$-A>0$，称A负定。

若$-A\geqslant0$，称A非正定。

引理1 设A，B均为n阶方阵，若用$\triangle$表A的任一子式，$(\triangle)$表B中相当于$\triangle$子式的代数余子式，则所有可能$\triangle$与$(\triangle)$之积的和等于$|A+B|$。

证 按列向量将A，B写为

$$A=(a_1,a_2,\cdot,a_n),\ B=(b_1,b_2,\cdot,b_n)$$

则

$$|A+B|=|a_1+b_1,\ a_2+b_2,\cdot,a_n+b_n|$$

将右端a_i+b_i分开成单项，用拉伯拉斯定理得证。

引理2 若n阶方阵A的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^na_n$$

则a_i恰为A的所有i阶主子式之和，如$a_1=\mathrm{tr}A$，$a_n=|A|$(划去相同序号的行列所得子式称主子式)。

证 因

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \cdot & \\ & & \lambda\end{pmatrix}+(-A)\right|$$

且因(1)λI除主子式外，其余子式为0；(2)任意n阶方阵中，i阶主子式的代数余子式就是余子式，即$n-i$阶主子式；(3)$-A$的i阶主子式等于A的相应i阶主子式乘$(-1)^i$，由以上各点即得证。

引理3 $\operatorname{tr}(A)=\Sigma\lambda_i$，$|A|=\Pi\lambda_i$。

证 因

$$|A-\lambda I|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots=\lambda^n-(\Sigma\lambda_i)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\Pi\lambda_i$$

故$a_1=\Sigma\lambda_i=\operatorname{tr}A$，$a_n=\Pi\lambda_i=|A|$。

性质1 设A为n阶对称方阵，则下列诸命题等价：

(1) A正定。

(2) 有非异方阵Q，使$A=Q'Q$。

(3) 有列满秩高阵G，使$A=G'G$。

(4) A的所有主子式大于0。

(5) A的所有i阶主子式之和a_i大于0。

(6) A的所有主要主子式大于0(左上角主子式叫主要主子式)。

(7) A的所有特征根大于0。

(8) 有非异方阵P，使$P'AP=I$。

证

(1)⇒(7) 当$X\neq 0$，有$X'AX>0$，对于对称方阵A，有正交阵C使

$$C'AC=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdot,\lambda_n)=\Lambda$$

其中λ_i为A的特征根。作$Y=C^{-1}X$，则$Y\neq 0$（因C非异，若$Y=0$，必$X=CY=0$），而

$$X'AX=Y'C'ACY=Y'\Lambda Y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2>0$$

取顺列向量$I_{(i)}=Y$，则$\lambda_i>0$。

(7)⇒(8) 接上证明，取

$$P_1=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}},\cdot,\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

则 $P_1'AP_1=I$，从而 $(CP_1)'A(CP_1)=P_1'C'ACP_1=I$，而所需$P=CP_1$非异。

(8)⇒(2) 因$A=(P^{-1})'P^{-1}$，取$Q=P^{-1}$。

(2)⇒(1) 对任$X\neq 0$，取$Y=QX$，则$Y\neq 0$，而$X'AX=X'Q'QX=(QX)'QX=Y'Y>0$。

(2)⇒(3) 取$G=Q$。

(3)⇒(4) 由 $A=G'G$，知A的任一 s 阶主子阵$A_1=G_1'G_1$，而G_1为G的某 s 列，由柯西公式知$|A_1|>0$。

(4)⇒(5) 显然。

(5)⇒(7) 因A 的特征多项式恰为

$$\lambda_n-a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^n a_n$$

诸$a_i>0$故上式无负根，再由$(-1)^n a_n\neq 0$，知它无0根。

(1)⇒(6) 因(1)⇒(4)⇒(6)。

(6)⇒(8) 用归纳法。对称方阵A的阶 $n=1$时，若 $A=(a)$，$a>0$，显然

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)A\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=(1)$$

设对 $n-1$ 阶的A已成立(8)，今看 n 阶的

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B \\ B' & d \end{pmatrix}$$

其中A_1对称，则

$$R=\begin{pmatrix} I & -A_1^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为非异方阵，使

$$R'AR=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

c 为一个数，由 $|R|^2\cdot|A|=|A_1|c$，因 $|A_1|$ 与 $|A|$ 均为正，故 c 为正。对 $n-1$ 阶的 A_1 若有 $\underset{n-1}{P_0'}A_1\underset{n-1}{P_0}=\underset{n-1}{I}$，则所需之

$$P=R\begin{pmatrix} \underset{n-1}{P_0} & \\ & \frac{1}{\sqrt{c}} \end{pmatrix}$$

此因

$$P'AP=\begin{pmatrix} \underset{n-1}{P_0'} & \\ & \frac{1}{\sqrt{c}} \end{pmatrix}R'AR\begin{pmatrix} \underset{n-1}{P_0} & \\ & \frac{1}{\sqrt{c}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \underset{n-1}{I} & \\ & 1 \end{pmatrix}=I$$

上述性质说明对称方阵是正定的充要条件为满足（2）—（8）中任一个。

性质2 若 $A>0$，则 $A^{-1}>0$。

证 因对正定阵 A，有非异方阵 Q 使 $A=Q'Q$。而 $A^{-1}=Q^{-1}(Q^{-1})'$，取非异方阵 $D=(Q^{-1})'$，则 $A^{-1}=D'D$，得证。

性质3 若 $A>0$，则存在 A 的正定平方根阵 M，使 $M^2=A$。

证 对 A 有正交阵 C 使

$$C'AC=\Lambda$$

其中 Λ 为主对角元素取 A 的特征根 $\lambda_i>0$ 的对角阵。于是

$$A=C\Lambda C'$$

作主对角元素为$\lambda_i^{1/2}>0$的对角阵$\Lambda^{\frac{1}{2}}$及$M=C\Lambda^{\frac{1}{2}}C'$，则$M=C\Lambda^{\frac{1}{4}}\Lambda^{\frac{1}{4}}C'$正定对称($\Lambda^{\frac{1}{4}}=(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$)，且$M\cdot M=A$。

性质4 若B对称$A>0$，则有非异方阵D使

$$D'AD=I$$

$$D'BD=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdot,\lambda_n)$$

其中λ_i是$|\lambda A-B|=0$的根（称为B对A的广义特征根）或$A^{-1}B$的特征根。

证 因$A>0$，故有非异方阵P使$P'AP=I$，又因B对称，故$P'BP$对称，有正交阵C使

$$C'P'BPC=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdot,\lambda_n)$$

而λ_i为$P'BP$特征根，因

$$|\lambda I-P'BP|=|P'(\lambda A-B)P|$$
$$=|P'||\lambda A-B||P|$$

因$|P|\neq 0$，故$P'BP$特征根即$|\lambda A-B|=0$的根。又

$$|\lambda A-B|=|\lambda A-AA^{-1}B|=|A||\lambda I-A^{-1}B|$$

因A正定而$|A|\neq 0$，故$|\lambda A-B|=0$之根即$A^{-1}B$之特征根。令$PC=D$，则

$$D'BD=\Lambda$$

又

$$C'P'APC=C'IC=I$$

即$D'AD=I$，得证。

我们知道，若多元函数

$$f=f(x_1,\cdot,x_t)$$

可展为台劳级数，当取至二阶时

$$f(x_1,\cdot,x_t)=f(x_{10},\cdot,x_{t0})+\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i-x_{i0})+\Big((x_1-x_{10})\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+(x_t-x_{t0})\frac{\partial}{\partial x_t}\Big)^2 f$$，式中偏导数在$(x_{10},\cdot,x_{t0})$取值。

将自变量用列向量

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

表示，则展开式可写为

$$f(X)=f(X_0)+\frac{df}{dX}(X-X_0)+(X-X_0)'\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(X-X_0)$$

则 f 取极值时，应使$\frac{df}{dX}=0$或其转置$\frac{\partial f}{\partial X}=0$，满足$\frac{\partial f}{\partial X}=0$的$X$点称为驻点。

极值充分条件是：若$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}>0$，即$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$正定，则$f$极小；若$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}<0$，即$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$负定，则$f$极大。而二阶导数取驻点值。

例3 求$f=x_1^2+x_2^2$极值点

因

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=2$$

由

$$\frac{\partial f}{\partial X}=\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}=0$$

求得驻点

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$$

对

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

因其主要主子式

$$|2|>0,\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}>0$$

故$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}>0$，而驻点为极小点。

例4 独立二元正态分布密度为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

因

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{-(x_1-a_1)}{2\pi\sigma_1^3\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}=\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{2\pi\sigma_1^3\sigma_2^3}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{-1}{2\pi\sigma_1^3\sigma_2}\left\{1-\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

故

$$\frac{\partial f}{\partial X}=\begin{pmatrix} -\frac{(x_1-a_1)}{2\pi\sigma_1^3\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} \\ -\frac{(x_2-a_2)}{2\pi\sigma_1\sigma_2^3}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} \end{pmatrix}$$

由 $\dfrac{\partial f}{\partial X}=0$，得驻点 $\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

又因

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}=$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2\pi\sigma_1^3\sigma_2}\left\{1-\dfrac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}\right\}\exp\left\{\dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\dfrac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} & \dfrac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{2\pi\sigma_1^3\sigma_2^3}\exp\left\{\dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\dfrac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} \\ \dfrac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{2\pi\sigma_1^3\sigma_2^3}\exp\left\{\dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\dfrac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} & \dfrac{-1}{2\pi\sigma_1\sigma_2^3}\left\{1-\dfrac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}\exp\left\{\dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\dfrac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} \end{pmatrix}$$

在驻点处

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}=\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}>0$$

故 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2}$ 负定，而

$$X=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

为 $f(x_1, x_2)$ 极大点。

例5 在最小二乘法中，有误差方程

$$\underset{nt}{A}\underset{t1}{X}=L-V$$

其中 $R(A)=t\leqslant n$，求X时要求

$$V'PV=\min$$

其中$\underset{n}{P}>0$即正定，P为L的权阵。由

$$\frac{\partial}{\partial X}V'PV=2\frac{\partial V'}{\partial X}PV=-2A'PV=0$$

得求X的正规方程

$$A'PAX=A'PL$$

因对正定阵P，必有非异方阵Q使$P=Q'Q$，而$A'PA=(QA)'QA$。因 P 对称，故 $A'PA$ 对称。因 $R(QA)=R(A)=t$，故 $R(A'PA)=R(QA)=t$，故 $A'PA$ 满秩。因 QA 为列满秩高阵，故$A'PA=(QA)'QA$正定。由

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2}V'PV=-2\frac{\partial}{\partial X}(V'PA)$$

$$=-2\left(\frac{\partial V'}{\partial X}\right)PA=2A'PA>0$$

故正规方程所解出之X为极小点。

第十节 广义逆矩阵

一、广逆与自反广逆

A^-为A之广逆指 A^-满足

$$AA^-A=A$$

显然，若A为nm阶，A^-必为mn阶。

在解符合方程时，要用广逆。所谓符合方程即一解或多解方程，非矛盾方程。若有符合方程

$$AX=Y$$

将A按列向量写出，上式可写为

$$(a_1, \cdot, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}=Y$$

即

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=Y$$

故Y为A的列向量的线性组合，即Y在A的列向量张成的空间内，记作$Y\in M(A)$。

性质1 $AA^-A=A \Leftrightarrow$ 符合方程$AX=Y$的解为$X=A^-Y$。

证

$\Rightarrow$ 因$AA^-A=A$，故$AA^-AX=AX$，即$AA^-Y=Y$，而$X=A^-Y$为$AX=Y$的解。

$\Leftarrow$ 选Y为A的i列，则$AX=a_i$为符合方程，而解为$X=A^-a_i$，代回原方程得$AA^-a_i=a_i$，联合$a_1,\cdots,a_n$各列即得$AA^-A=A$。

性质2 符合方程$AX=Y$的通解为

$$X=A^-Y+(I-A^-A)Z,$$

其中Z为任意（可乘）向量。

证 因

$$AX=AA^-Y+A(I-A^-A)Z=Y+0=Y$$

性质3 若A有某一广逆A^-，则作

$$G=A^-+V(I-AA^-)+(I-A^-A)W$$

其中V，W为任意（可乘）矩阵，此G亦为A的广逆。

证 因

$$AGA=AA^-A+AV(I-AA^-)A+A(I-A^-A)WA$$
$$=AA^-A+0+0=A$$

反之，若G为广逆，取$V=G-A^-$，$W=GAA^-$，则

$$G=A^-+(G-A^-)(I-AA^-)+(I-A^-A)GAA^-$$

即为上述形式。

性质4 A为非异方阵时，A^-即普通真逆阵A^{-1}。

证　因$AX=Y$有唯一解$X=A^-Y=A^{-1}Y$，故$A^-=A^{-1}$。

性质5 若A^-为广逆，则A^-A幂等且$R(A^-A)=R(A)$。

证　因$A^-A\cdot A^-A=A^-A$，故A^-A幂等。又$AA^-A=A$，故$R(A)\leqslant R(A^-A)$；但$R(A^-A)\leqslant R(A)$，结合两者得证。

性质6 $(A^-)'=(A')^-$

证　$AA^-A=A\Rightarrow A'=A'(A^-)'A'$，但$(A')^-$满足$A'(A')^-A'=A'$，故任$(A^-)'$属于$A'$广逆集合；又$A'(A')^-A'=A'\Rightarrow A=A((A')^-)'A$，故$((A')^-)'$属于$A^-$集合，即任$(A')^-$属于$(A^-)'$集合。从而$(A^-)'$与$(A')^-$两集合相等。

性质7 $A(A'A)^-A'A=A$，$A'A(A'A)^-A'=A'$

证　因

$$\begin{aligned}&\{A(A'A)^-A'A-A\}'\{A(A'A)^-A'A-A\}\\&=\{A'A(A'A)^--I\}A'\{A(A'A)^-A'A-A\}\\&=\{A'A(A'A)^--I\}\{A'A(A'A)^-A'A-A'A\}=0\end{aligned}$$

但由本章第三节运算律8，知$B'B=0\Rightarrow B=0$，于是$A(A'A)^-A'A-A=0$，得证第一式。同样可证第二式。

若A的广逆A^-又满足$A^-AA^-=A^-$，则称它为自反广逆A_r^-，即A_r^-满足

$$AA_r^-A=A,\quad A_r^-AA_r^-=A_r^-$$

显然，有

性质8 $R(A_r^-)=R(A)$

下面讨论广逆作法。

性质9 对矩阵A，若$R(A)=r$，且有非异子方阵B_r在左

上角，即

$$A=\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

则有(1) $E=DB^{-1}C$，于是A有秩因子分解为

$$A=\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}(I_r,\ B^{-1}C)$$

(2) A的广逆为

$$A^-=\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

且为自反广逆。

证

(1) 将A按秩因子分解为$A=\underset{mr}{P}\underset{rn}{Q}$，又将$P$，$Q$分出$r$阶非异方阵$P_1$，$Q_1$，则

$$A=\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}(Q_1,\ Q_2)=\begin{pmatrix} P_1Q_1 & P_1Q_2 \\ P_2Q_1 & P_2Q_2 \end{pmatrix}$$

于是$B=P_1Q_1$(非异方阵P_1，Q_1，B秩皆为r)，$C=P_1Q_2$，$D=P_2Q_1$，而

$$E=P_2Q_2=P_2Q_1Q_1^{-1}P_1^{-1}P_1Q_2=DB^{-1}C$$

(2) 因

$$AA^-A=\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B & C \\ D & DB^{-1}C \end{pmatrix}=A$$

$$A^-AA^-=\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A^-$$

性质10　对矩阵 A，若 $R(A)=r$，且A中非异子方阵B不一定在左上角，则在A的转置阵中，将B'换为B^{-1}，其余处取0，即得A^-且为自反广逆。

证　对A作第Ⅲ种初等变换，即左右乘P、Q，将B换至左上角，则

$$PAQ=\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \\ F & G \end{pmatrix}$$

因第三种初等矩阵逆为其自身，故

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \\ F & G \end{pmatrix}Q^{-1}=P\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \\ F & G \end{pmatrix}Q$$

于是

$$A^-=Q\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P$$

即为A之转置阵中B'换为B^{-1}，其余处为0。而

$$AA^-A=P^{-1}\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \\ F & G \end{pmatrix}Q^{-1}\cdot Q\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P\cdot P^{-1}\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \\ F & G \end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \\ F & G \end{pmatrix}Q^{-1}=A$$

同样可得

$$A^{-}AA^{-}=Q\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P\cdot P^{-1}\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \\ F & G \end{pmatrix}Q^{-1}\cdot Q$$

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P=Q\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P=A^{-}$$

二、极小范数广逆

符合方程$AX=Y$的解$X=GY$中范数极小者，称为方程的极小范数解，此G称为A的极小范数广逆A_m^-。

性质1 G为A_m^-的充要条件是

$$AGA=A,\ (GA)'=GA$$

证 因$AX=Y$的通解为$GY+(I-GA)Z$，Z为任意向量。当GY范数极小，则

$\|GY\|\leqslant\|GY+(I-GA)Z\|$，对所有$Y\in M(A)$及任意$Z$

$\Leftrightarrow(GAX,(I-GA)Z)=0$

$\Leftrightarrow(GA)'(I-GA)=0$

$\Leftrightarrow(GA)'=(GA)'GA$

$\Leftrightarrow GA=(GA)'$

又G为广逆，即$AGA=A$，得证。

性质2 A_m^-之集可表示为

$$A_m^-+U(I-AA_m^-)$$

其中U为任意（可乘）矩阵。

证 因$G=A_m^-+U(I-AA_m^-)$为广逆，故满足$AGA=A$，又$GA=A_m^-A+U(I-AA_m^-)A=A_m^-A$对称，故$G$为极小范数广逆，

反之，若G为极小范数广逆，则它总可表为上述形式

$$G=A_m^-+(G-A_m^-)(I-AA_m^-)$$

这因右端

$$A_m^- + (G - A_m^-)(I - AA_m^-)$$
$$= A_m^- + G - A_m^- - GAA_m^- + A_m^- AA_m^-$$
$$= A_m^- + G - A_m^- - A_m^- AA_m^- + A_m^- AA_m^- = G.$$

性质3 极小范数广逆之一为$A'(AA')^-$

证 因$G = A'(AA')^-$满足$AGA = AA'(AA')^- A = A$，$GA = A'(AA')^- A$对称。

性质4 当A为行满秩低阵时，A_m^-唯一且

$$A_m^- = A'(AA')^{-1}$$

证 由性质3及AA'为满秩方阵得证。

三、最小二乘广逆

使方程$AX = Y$的解$X = GY$满足$\|AX - Y\| = \min$者，称为方程的最小二乘解，此G称为A的最小二乘广逆A_l^-。

性质1 G为A_l^-的充要条件是

$$AGA = A,\ (AG)' = AG$$

证 因

$$\|AGY - Y\| \leqslant \|AX - Y\| = \|AX - AGY + AGY - Y\|,$$

对所有X，Y

$$\Leftrightarrow \{A(X - GY)\}'(AG - I)Y = 0$$
$$\Leftrightarrow A'(AG - I) = 0$$
$$\Leftrightarrow A' = A'AG \quad 即 \quad A = G'A'A$$
$$\Leftrightarrow AG = G'A'AG对称且AGA = (AG)'A = A$$

性质2 A_l^-之集可表示为$A_l^- + (I - A_l^- A)U$，而U为任意（可乘）矩阵。

证 因$G = A_l^- + (I - A_l^- A)U$为广逆，故满足$AGA = A$；又$AG = AA_l^-$对称，故$G$为最小二乘广逆。

反之，若G为最小二乘广逆时，则总可按上述形式表为

$$G=A_l^-+(I-A_l^-A)(G-A_l^-)$$

此时，因$AG=AA_l^-$，故右端等于$A_l^-+G-A_l^-+A_l^-AG+A_l^-AA_l^-=G$。

性质3 A_l^-之一为$(A'A)^-A$

证 因$G=(A'A)^-A'$满足性质1。

性质4 当A为列满秩高阵时，A_l^-唯一且

$$A_l^-=(A'A)^{-1}A'$$

证 由性质3及$A'A$为满秩方阵得证。

性质5 $(A')_m^-=(A_l^-)'$

证 因$G=(A')_m^-$满足

$$A'GA'=A',\ (GA')'=GA$$

即

$$AG'A=A,\ AG'=GA'=(AG')'$$

故 $G'=A_l^-$，而$G=(A')_m^-=(A_l^-)'$

四、极小最小二乘广逆

使方程$AX=Y$的解$X=GY$满足$\|AX-Y\|=\min$又$\|GY\|$极小者，称为方程的极小最小二乘解，此G称A的极小最小二乘广逆A^+。

性质1 $A^+=A_m^-AA_l^-$

证 $AX=Y$的最小二乘解为$X=A_l^-Y$，又$AX=AA_l^-Y$为符合方程（右端$\in M(A)$），故极小最小二乘解为$X=A_m^-AA_l^-Y$，而$A^+=A_m^-AA_l^-$。

性质2 A^+唯一。

证 因

$$\{A_m^-+U(I-AA_m^-)\}A\{A_l^-+(I-A_l^-A)W\}$$

$$=A_m^-A\{A_l^-+(I-A_l^-A)W\}=A_m^-AA_l^-$$

性质3 A^+的充分必要条件为下述四条件：

$$AA^+A=A,\ A^+AA^+=A^+,$$
$$(AA^+)'=AA^+,\ (A^+A)'=A^+A$$

上述四条件由穆尔(Moore, 1935)，彭罗斯(Penrose, 1955)提出。

证 对$A^+=A_m^-AA_l^-$，因

$$AA^+A=\underbrace{AA_m^-A}A_l^-A=AA_l^-A=A$$

$$A^+AA^+=A_m^-\underbrace{AA_l^-\cdot A}\cdot A_m^-AA_l^-=A_m^-\underbrace{AA_m^-A}A_l^-$$

$$=A_m^-AA_l^-=A^+$$

$$AA^+=\overline{A\cdot A_m^-A}A_l^-=AA_l^-\quad 对称$$

$$A^+A=A_m^-\underbrace{AA_l^-\cdot A}=A_m^-A\quad 对称$$

故A^+满足四条件。又满足四条件之广逆唯一，因若G，H满足四条件，则

$$G=GAG=GG'A'=G\cdot G'A'G'\cdot A'H'A'$$

$$=GAG\underbrace{AG}AH=G\underbrace{AG}AH=GAH=GA\cdot HAH$$

$$=\underbrace{A'G'A'}H'H=A'H'H=HAH=H$$

故四条件为A^+充要条件。

性质4 $A^+=A'(AA')^-A(A'A)^-A'$

证 取$A_m^-=A'(AA')^-$及$A_l^-=(A'A)^-A'$代入

$A^+=A_m^-AA_l^-$即可。

性质5 $(A^+)^+=A,\ (A^+)'=(A')^+$

证 因性质3四条件中A与A^+可互换。又

$(A^+)'=A(A'A)^-A'(AA')^-A$恰为$(A')^+$。

性质6 若$A=A'$则$A^+=(A^+)'$

证 由上一性质可得。

性质7 若A的秩因子分解为$A=PQ$，则

$$A^+=Q'(QQ')^{-1}(P'P)^{-1}P'=Q_m^-P_l^-$$

证 因上述A^+表式满足四条件。

性质8 若$\underset{nm}{A}$之$R(A)=m$，则 $A^+=A_l^-=(A'A)^{-1}A'$。若 $\underset{nm}{A}$之$R(A)=n$，则$A^+=A_m^-=A'(AA')^{-1}$。

证 令性质7中$A=\underset{nm}{A}\underset{m}{I}$可证第一式。令$A=\underset{n}{I}\underset{nm}{A}$可证第二式。

性质9 $(A'A)^+=A^+(A')^+$，$(AA')^+=(A^+)'A^+$，$(AA^+)^+=AA^+$，$(A^+A)^+=A^+A$。

证 对A作秩因子分解$\underset{nm}{A}=\underset{nr}{P}\underset{rm}{Q}$，则 $A'A=\underset{mr}{Q'}\cdot\underbrace{P'PQ}_{rm}$ 为秩因子分解式（因$A'A$秩为r），故

$$(A'A)^+=Q'P'P(P'PQQ'P'P)^{-1}(QQ')^{-1}Q$$

但$P'P$，QQ'为非异方阵，故

$$(A'A)^+=Q'P'P(P'P)^{-1}(QQ')^{-1}(P'P)^{-1}(QQ')^{-1}Q$$
$$=Q'(QQ')^{-1}(P'P)^{-1}(QQ')^{-1}Q$$

又因$A^+=Q'(QQ')^{-1}(P'P)^{-1}P'$而$(A')^+=P(P'P)^{-1}(QQ')^{-1}Q$ 故

$$A^+(A')^+=Q'(QQ')^{-1}(P'P)^{-1}(QQ')^{-1}Q=(A'A)^+$$

第一式得证。将第一式中A换为A'，注意$(A')^+=(A^+)'$即得第二式。再证第三式，因

$$AA^+=PQ\cdot Q'(QQ')^{-1}(P'P)^{-1}P'=\underset{nr}{P}\cdot\underbrace{(P'P)^{-1}P'}_{rn}$$

因P及$(P'P)^{-1}P'$秩皆为r，故 AA^+ 秩为r，上式为秩因子分解。故

$$(AA^+)^+=P(P'P)^{-1}((P'P)^{-1}P'\cdot P(P'P)^{-1})^{-1}(P'P)^{-1}P'$$
$$=P(P'P)^{-1}P'P(P'P)^{-1}P'$$

$$=P(P'P)^{-1}P'=AA^+$$

第三式得证。将A^+换为A，可得第四式。

为得出比性质 4 更方便的A^+计算法，先看

引理1 若$E'EE'=0$ 则$E=0$。

证 $E'EE'=0\Rightarrow EE'EE'=(EE')'EE'=0\Rightarrow EE'=0$，于是$E=0$。

引理2 若$EE'E=0$，则$E=0$。

证 取E为引理 1 中E'即可证。

性质10 $A^+=A'(A'AA')^-A'$

证 按性质3，证右端$E=A'(A'AA')^-A'$满足四条件即可。

（1） 证$B=AEA$与A相等。因

$$B-A=\{AA'(A'AA')^-A'-I\}A$$

故

$$\begin{aligned}&(B-A)'(B-A)(B-A)'\\&=A'\{A(AA'A)^-AA'-I\}\{AA'(A'AA')^-A'\\&\quad-I\}A\cdot A'\{A(AA'A)^-AA'-I\}\\&=\{A'A(AA'A)^-A-I\}A'\{AA'(A'AA')^-A'\\&\quad-I\}AA'\{A(AA'A)^-AA'-I\}\\&=\{A'A(AA'A)^-A-I\}\{A'AA'(A'AA')^-A'AA'\\&\quad-A'AA'\}\{A(AA'A)^-AA'-I\}\\&=\{A'A(AA'A)^-A-I\}\{A'AA'\\&\quad-A'AA'\}\{A(AA'A)^-AA'-I\}\\&=0\end{aligned}$$

由引理1，$B=A$。

（2） 证$D=EAE$与E相等，因

$$E-D=A'(A'AA')^-A'$$

$$-A'(A'AA')^{-}A'AA'(A'AA')^{-}A'$$

又由（1）知$A'=A'A(AA'A)^{-}AA'$，因

$$\begin{aligned}
&(E-D)'(E-D)\\
&=\{A(AA'A)^{-}A\\
&\quad -A(AA'A)^{-}AA'A(AA'A)^{-}A\}A'\{(A'AA')^{-}A'\\
&\quad -(A'AA')^{-}A'AA'(A'AA')^{-}A'\}\\
&=\{A(AA'A)^{-}AA'\\
&\quad -A(AA'A)^{-}\underbrace{AA'A(AA'A)^{-}AA'}\}\{(A'AA')^{-}A'\\
&\quad -(A'AA')^{-}A'AA'(A'AA')^{-}A'\}\\
&=\{A(AA'A)^{-}AA'-A(AA'A)^{-}AA'\}\{(A'AA')^{-}A'\\
&\quad -(A'AA')^{-}A'AA'(A'AA')^{-}A'\}\\
&=0
\end{aligned}$$

故$E=D$。

（3）、证$(AE)'=AE$。即证$C=AE=AA'(A'AA')^{-}A'$与$D=(AE)'=A(AA'A)^{-}AA'$相等，因由（1）知

$$AA'(A'AA')A'A=A, \text{ 今}$$

$$C-D=AA'(A'AA')^{-}A'-A(AA'A)^{-}AA'$$

故

$$\begin{aligned}
&(C-D)'(C-D)(C-D)'\\
&=\{A(AA'A)^{-}A\\
&\quad -AA'(A'AA')^{-}\}A'\{AA'(A'AA')^{-}A'\\
&\quad -A(AA'A)^{-}AA'\}A\{(AA'A)^{-}AA'\\
&\quad -A'(A'AA')^{-}A'\}\\
&=\{A(AA'A)^{-}A\\
&\quad -AA'(A'AA')^{-}\}\{A'\underbrace{AA'(A'AA')^{-}A'A}\\
&\quad -\underbrace{A'A(AA'A)^{-}AA'A}\}\{(AA'A)^{-}AA'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-A'(A'AA')^{-}A'\} \\
&=\{A(AA'A)^{-}A-AA'(A'AA')^{-}\}\{A'A \\
&\quad -A'A\}\{(AA'A)^{-}AA'-A'(A'AA')^{-}A'\} \\
&=0
\end{aligned}
$$

故 $C=D$

（4） 证 $(EA)'=EA$。作

$$C=EA=A'(A'AA')^{-}A'A,$$

$$D=(EA)'=A'A(AA'A)^{-}A$$

故证 $C=D$ 即可，因有

$$C-D=A'(A'AA')^{-}A'A-A'A(AA'A)^{-}A$$

而

$$
\begin{aligned}
&(C-D)(C-D)'(C-D) \\
&=\{A'(A'AA')^{-}A' \\
&\quad -A'A(AA'A)^{-}\}A\{A'A(AA'A)^{-}A \\
&\quad -A'(A'AA')^{-}A'A\}A'\{(A'AA')^{-}A'A \\
&\quad -A(AA'A)^{-}A\} \\
&=\{A'(A'AA')^{-}A' \\
&\quad -A'A(AA'A)^{-}\}\{A\underline{A'A(AA'A)^{-}AA'} \\
&\quad -\underline{AA'(A'AA')^{-}A'}AA'\}\{(A'AA')^{-}A'A \\
&\quad -A(AA'A)^{-}A\} \\
&=\{A'(A'AA')^{-}A'-A'A(AA'A)^{-}\}\{AA' \\
&\quad -AA'\}\{(A'AA')^{-}A'A-A(AA'A)^{-}A\} \\
&=0
\end{aligned}
$$

由引理2，知 $C=D$。

五、举　　例

例1　当

$$A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

有

$$A^{-}=(1,0,0),\ A^{-}=(0,1,0)$$

等。又当

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

有

$$A^{-}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ A^{-}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

等。

例2　求符合方程

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

的解。因

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

取

$$A^{-}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

得解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

当取

$$A^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

例3 求$x_1+x_2+x_3=w$的极小范数解.

因$AX=Y$现为

$$(1,1,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (w)$$

又$R(A)=1$，故

$$A_m^- = A'(AA')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_m^-(w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}w \\ \frac{1}{3}w \\ \frac{1}{3}w \end{pmatrix}$$

例4 在最小二乘法中，误差方程一般为

$$AX=L-V$$

而$R(\underset{nt}{A})=t\leqslant n$。在$V'V=\min$下解得

$$X=A_l^-L$$

而 $A_l^-=(A'A)^{-1}A'$。如误差方程为

$$x=l_1-v_1$$
$$x_2=l_2-v_2$$
$$x_3=l_3-v_3$$
$$x_4=l_4-v_4$$

即

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\l_3\\l_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}$$

而

$$A_l^-=(A'A)^{-1}A'=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

$$x=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\l_3\\l_4\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\sum l_i$$

例5 极小最小二乘解

如有误差方程

$$x_1+x_2=l_1-v_1$$
$$x_1+x_2=l_2-v_2$$
$$x_1+x_2=l_3-v_3$$

即 $AX=L-V$ 为

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

此时 $R(\underset{3\times2}{A})=1<2$，故由

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$A'AA'=6\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$(A'AA')^-=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

得

$$A^+=A'(A'AA')^-A'=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

而方程的极小最小二乘解为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A^+\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\sum l\\\frac{1}{6}\sum l\end{pmatrix}$$

例6 幂等对称阵 A 之极小最小二乘广逆即其自身。因 A 满足四中性质3四条件。

第十一节 奇异单位阵

对矩阵 A，作其极小最小二乘广逆 A^+，称

$$A^{\circ}=AA^{+}$$

为A的奇异单位阵。

性质1 A°幂等对称，且$A^{\circ}A=A$，$A^{+}A^{\circ}=A^{+}$。

证 因

$$A^{\circ\prime}=(AA^{+})'=AA^{+}=A^{\circ}$$

$$A^{\circ}A^{\circ}=AA^{+}\cdot AA^{+}=AA^{+}=A^{\circ}$$

故A°幂等对称。又

$$A^{\circ}A=AA^{+}A=A,\quad A^{+}A^{\circ}=A^{+}AA^{+}=A^{+}$$

得证。但应注意$AA^{\circ}\neq A$，$A^{\circ}A^{+}\neq A^{+}$。

性质2 $R(A^{\circ})=R(A)$

证 因$AA^{+}=A^{\circ}$，故$R(A^{\circ})\leqslant R(A)$；又由性质1，$A^{\circ}A=A$，故$R(A)\leqslant R(A^{\circ})$。结合两者得证。

性质3 A°特征根$R(A)$个为1，其余0。

证 因A°幂等对称，故由第八节性质13，知其特征根为1的有$R(A^{\circ})=R(A)$个，而其余为0。

性质4 当$R(\underset{nm}{A})=r<n$时，$|A^{\circ}|=0$。

证 因$R(\underset{nn}{A^{\circ}})=R(A)=r<n$，故$|A^{\circ}|=0$。

例 今有方程组

$$x=l_1$$

$$x=l_2$$

则 $AX=L$为

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}$$

因A为列满秩高阵，故$AX=L$极小最小二乘解即最小二乘解

$$X=A^{+}L=(A'A)^{-1}A'L=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(l_1+l_2)$$

又

$$A^{\circ}=AA^{+}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

幂等对称，且$R(A^{\circ})=R(A)=1$，A°特征根为1及0，$|A^{\circ}|=0$(因$R(A)=1<2$)。

第三章　随机变量与分布函数

第一节　随 机 变 量

定义　若对每次实验结果，可以用一个数ξ来表示，且对任何实数x，$\xi<x$有确定的概率，则称ξ是随机变量。而称

$$F(x)=P(\xi<x) \tag{3.1}$$

为随机变量ξ的分布函数。

由于

$$P(x_1\leqslant\xi<x_2)=P(\xi<x_2)-P(\xi<x_1)$$
$$=F(x_2)-F(x_1) \tag{3.2}$$

但概率非负，故当$x_2>x_1$则$F(x_2)\geqslant F(x_1)$，即$F(x)$是x的非减函数，且

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$$

$$F(x)-F(x-0)=\lim_{x_1\to x}P(x_1\leqslant\xi<x)=0$$

故分布函数具有三个性质：

性质1　$F(x)$是x的非减函数。

性质2　$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$。

性质3　$F(x)$处处左连续。

我们经常遇到两种随机变量：

1.　离散型　若ξ取值x_1，x_2，…可列举出来，且

$$P(\xi=x_i)=P_i$$

则称ξ为离散型随机变量。

2. 连续型 若ξ的分布函数可表为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \quad (f(x)\geqslant 0) \tag{3.3}$$

则称ξ为连续型随机变量。称$f(x)$为连续型随机变量的分布密度。

分布密度$f(x)$满足

(1) $f(x)\geqslant 0$。 (3.4)

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$。 (3.5)

(3) $P(a\leqslant\xi<b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)dx$。 (3.6)

例1 二项分布$B(n,p)$

设在每次实验中，事件A发生的概率为p，今求n次独立实验中事件A出现k次的概率。

由于实验的独立性，事件在A的指定k次实验中发生，而在其余$n-k$次实验中不发生的概率由乘法定理应为

$$p^k q^{n-k} \quad (q=1-p)$$

由于我们未指定A是在那k次实验中发生，因此由排列组合知上述事件能以$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$种方式发生，由加法定理，若以$\mu$表$n$次实验中$A$出现的次数，则

$$P(\mu=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

由于右端恰是$(p+q)^n$展开式中第$k+1$项，故称μ服从二项分布。其分布函数（图3.1）

$$F(x)=P(\mu<x)=\sum_{k<x}\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}$$

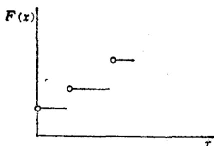


图3.1 二项分布

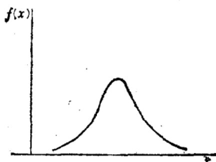


图3.2 正态分布

例2 正态分布$N(\mu,\sigma^2)$

连续型随机变量ξ服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$指其分布密度(图3.2)

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.7}$$

以后为方便起见，某随机变量服从某一分布用符号"～"表示。如本例ξ服从正态分布$N(a,\sigma^2)$，即可表示为$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$。

服从$N(\mu,\sigma^2)$的随机变量的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \tag{3.8}$$

服从正态分布的偶然误差指它是一个$N(0,\sigma^2)$的随机变量。

标准正态分布$N(0,1)$的分布密度和分布函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{3.9}$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx \tag{3.10}$$

$\Phi(x)$值见附表1。

例3　均匀分布$U[a,b]$

连续型随机变量$\xi \sim U[a,b]$，指其分布密度(图3.3)[5]

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & 当a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & 其它\end{cases} \tag{3.11}$$

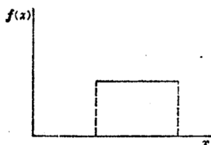


图 3.3　均匀分布

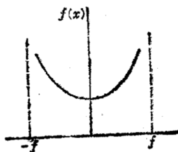


图 3.4　反正弦分布

例4　反正弦分布$As[-f,f]$

连续型随机变量$\xi \sim As[-f,f]$，指其分布密度（图3.4）

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{f^2-x^2}}, & 当|x|\leqslant f\\ 0, & 其它\end{cases} \tag{3.12}$$

第二节　随机向量

n个随机变量ξ_1，ξ_2，…，ξ_n的总体$\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$称为$n$维随机向量或$n$元随机变量。称

$$F(x_1,x_2, \cdots, x_n)$$
$$=P(\xi_1<x_1, \xi_2<x_2, \cdots, \xi_n<x_n) \tag{3.13}$$

为ξ的分布函数。

分布函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足

1. $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对每个变元非降。

2. $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对每个变元左连续。

3. $F(+\infty,+\infty,\cdots,+\infty)=1$ 且当 $i=1,2,\cdots,n$ 时皆有 $\lim\limits_{x_i\to-\infty} F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$。

我们称

$$F_1(x_1)=F(x_1,\infty,\cdots,\infty)$$

$$\cdots$$

$$F_n(x_n)=F(\infty,\infty,\cdots,x_n)$$

为$\xi_1,\cdots,\xi_n$的（边缘）分布函数。

若对任意的$x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n)$$

则称随机向量的分量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$独立。

我们常研究两种随机向量：

1. 离散型　指ξ取值可列。此时各分量独立的充要条件是

$$P(\xi_1=x_1,\ \xi_2=x_2,\cdots,\xi_n=x_n)$$
$$=P(\xi_1=x_1)P(\xi_2=x_2)\cdots P(\xi_n=x_n)$$

2. 连续型　指ξ的分布函数F可用分布密度$f\geqslant0$表示为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(z_1,z_2,\cdots,z_n)\,dz_1dz_2\cdots dz_n \qquad (3.14)$$

分布密度满足

（1） $f\geqslant0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n=1$

(3) 若G是n维空间中一个区域，则

$$P((\xi_1,\cdots,\xi_n)\in G)=\int\underset{G}{\cdots}\int f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n \tag{3.15}$$

我们称

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)$$
$$dx_2\cdots dx_{n-1}dx_n$$

$$\cdots$$

$$f_n(x_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)$$
$$dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

为$\xi_1,\cdots,\xi_n$的（边缘）分布密度。显然

$$f_i(x_i)=\frac{d}{dx_i}F_i(x_i)$$

连续型随机向量各分量独立充要条件为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n) \tag{3.16}$$

例 二维正态分布随机向量密度

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} \tag{3.17}$$

我们来看ξ_1，ξ_2的密度。因

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)dx_2=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$f_2(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_1=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

可见 $f(x_1,x_2)=f_1(x_1)f_2(x_2)$ 的充要条件是 $\rho=0$，即二维正态向量分量独立的充要条件是$\rho=0$。

第三节　随机变量函数

已知随机变量的分布密度砚求函数分布。

性质1　若$\xi\geqslant 0$的分布密度为$f(x)$，则$\eta=\sqrt{\xi}$的分布密度

$$f_1(y)=\begin{cases}2yf(y^2), & \text{当}y>0\\ 0, & \text{当}y\leqslant 0\end{cases} \tag{3.18}$$

证　因η非负，故当$y\leqslant 0$时，分布函数$F_1(y)=0$，而$f_1(y)=0$。当$y>0$时

$$F_1(y)=P(\eta<y)=P(\xi<y^2)=F(y^2)$$

$$f_1(y)=\frac{d}{dy}F_1(y)=\frac{dy^2}{dy}\cdot\frac{d}{dy^2}F(y^2)=2yf(y^2)$$

性质2　当ξ的分布密度为$f(x)$，则$\eta=\xi^2$的分布密度

$$f_1(y)=\begin{cases}\dfrac{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, & \text{当}y>0\\ 0, & \text{当}y\leqslant 0\end{cases} \tag{3.19}$$

证　因η非负，故当$y\leqslant 0$时$f_1(y)=0$。当$y>0$时，η的分布函数与分布函数

$$F_1(y)=P(\eta<y)=P(\xi^2<y)$$

$$=P(-\sqrt{y}<\xi<\sqrt{y})=F(\sqrt{y})-F(\sqrt{y})$$

$$f_1(y)=\frac{d}{dy}F_1(y)=\frac{d\sqrt{y}}{dy}\cdot\frac{d}{d\sqrt{y}}F(\sqrt{y})$$

$$-\frac{d(-\sqrt{y})}{dy}\cdot\frac{d}{d(-\sqrt{y})}F(-\sqrt{y})$$

$$=\frac{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

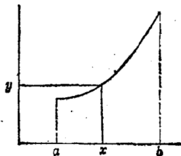
系 若ξ仅取正值，则$y\leqslant 0$时$f_1(y)=0$，而$y>0$时

$$f_1(y)=\frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

性质3 若ξ的分布密度为$f(x)$，函数$y=\varphi(x)$单调（因而方程有唯一解$x=\psi(y)$）、连续可微，则$\eta=\varphi(\xi)$分布密度

$$f_1(y)=f(\psi(y))|\psi'(y)| \tag{3.20}$$

证 若ξ在$[a,b]$取值（包括$a=-\infty$，$b=\infty$情形），则如图3.5



（1） 当$\varphi(x)$单调增，则η分布函数

$$F_1(y)=P(\eta<y)$$

$$=P(a<\xi<x)=\int_a^{\psi(y)}f(t)dt$$

于是

$$f_1(y)=f(\psi(y))\psi'(y),$$

$$\psi'(y)>0。$$

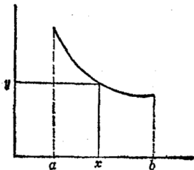


图3.5 单调函数

（2） 当$\varphi(x)$单调减，则

$$F_1(y)=P(\eta<y)=P(x<\xi<b)=\int_{\psi(y)}^{b}f(t)dt$$

$$f_1(y)=-f(\psi(y))\psi'(y),\ \psi'(y)<0$$

以上(1)(2)都满足$f_1(y)=f(\psi(y))|\psi'(y)|$。若$\varphi$非单调，则可划分单调区间用类似法求出$f_1(y)$。

系　若$\eta=a\xi+b$，则

$$f_1(y)=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{y-b}{a}\right) \tag{8.21}$$

即$a>0$时用

$$f_1(y)=\frac{1}{a}f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

当$a<0$时用

$$f_1(y)=-\frac{1}{|a|}f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

例1　若$\xi\sim N(0,1)$，即其分布密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

则$\eta=\sigma\xi+\mu(\sigma>0)$的分布密度

$$f_1(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

于是$\eta\sim N(\mu,\sigma^2)$

例2　若$\xi\sim U[0,2\pi]$，则$\eta=f\sin(\xi-\xi_0)\sim As[-f,f]$，其中$f$，$\xi_0$为常数。

我们看，当y为正且$y\leqslant f$时（图3.6）

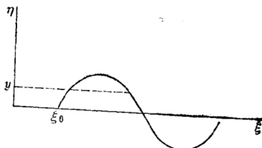


图3.6　反正弦分布密度

$$P(\eta<y)=P(f\sin(\xi-\xi_0)<y)=P\left(\sin(\xi-\xi_0)<\frac{y}{f}\right)$$

$$=1-P\left(\arcsin\frac{y}{f}<\xi-\xi_0<\pi-\arcsin\frac{y}{f}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2\pi}\left(\pi-2\arcsin\frac{y}{f}\right)$$

$$f(y)=\frac{d}{dy}P(\eta<y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{f^2-y^2}}$$

当y为负且$y\geqslant-f$时

$$P(\eta<y)=P(f\sin(\xi-\xi_0)>-y)$$

$$=P\left(\arcsin\frac{-y}{f}<\xi-\xi_0<\pi-\arcsin\frac{-y}{f}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\pi-2\arcsin\frac{-y}{f}\right)$$

$$f(y)=\frac{d}{dy}P(\eta<y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{f^2-y^2}}$$

当$|y|>f$时，显然$f(y)=0$，得证。

第四节　随机向量函数

若n维随机向量$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的分布函数是$F(x_1,\cdots,x_n)$，而$\eta_i=f_i(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，其中$f_i$是$n$元连续函数，则$k$维随机向量$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_k)$的分布函数

$$\begin{aligned}\Phi(y_1,\cdots,y_k)&=P(\eta_1<y_1,\cdots,y_k<y_k)\\&=P(f_1(\xi_1,\cdots,\xi_n)<y_1,\cdots,\\&\quad f_k(\xi_1,\cdots,\xi_n)<y_k)\\&=\int_D\cdots\int dF(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

其中D是满足k个不等式$f_i(x_1,\cdots,x_n)<y_i$; $i=1,\cdots,k$的点集.

当$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$为连续型时

$$\Phi(y_1,\cdots,y_k)=\int_D\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

1. 和的分布

性质 若(ξ_1,ξ_2)的分布密度为$f(x_1,x_2)$，则$\eta=\xi_1+\xi_2$的分布密度

$$f_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z,x-z)dz \qquad (3.22)$$

证 $\eta=\xi_1+\xi_2$ 的分布函数(图3.7)

$$F_\eta(x)=\iint\limits_{x_1+x_2<x}f(x_1,x_2)dx_2dx_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x-x_1}f(x_1,x_2)dx_2dx_1$$

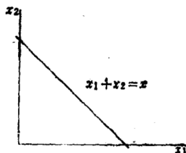


图3.7 和的分布

故

$$f_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x-x_1)dx_1$$

得证.

系 当ξ_1与ξ_2独立，且它们分布密度分别为$f_1(x_1)$与$f_2(x_2)$，则

$$f_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z)f_2(x-z)dz \qquad (3.23)$$

此时，称f_η为f_1与f_2的卷积，记为$f_\eta=f_1*f_2$.

例1 若(ξ_1,ξ_2)是正态随机向量，其分布密度

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$

$$-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\Big)\Big\}$$

则 $\eta=\xi_1+\xi_2$ 的密度

$$f_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\ x-x_1)dx_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}}\exp$$

$$\cdot\left\{\frac{-(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}\right\}$$

即

$$\xi_1+\xi_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)$$

2. 商的分布

性质 若 $(\xi,\ \xi_2)$ 的分布密度为 $f(x_1,\ x_2)$，则 $\eta=\xi_1/\xi_2$ 的分布密度

$$f_\eta(x)=\int_0^{\infty}zf(zx,\ z)dz-\int_{-\infty}^{0}zf(zx,\ z)dz \tag{3.24}$$

证 因 η 的分布函数（图3.8）

$$F_\eta(x)=P\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}<x\right)=\iint\limits_{x_1/x_2<x}f(x_1,\ x_2)dydz$$

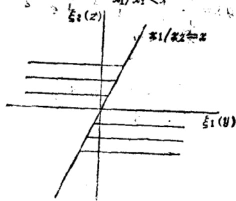


图3.8 商的分布

$$=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{zx} f(y,z)dydz+\int_{-\infty}^{0}\int_{zx}^{\infty} f(y,z)dydz$$

于是

$$f_\eta(x)=\int_0^{\infty} zf(zx,z)dz-\int_{-\infty}^{0} zf(zx,z)dz$$

系 当ξ_1，ξ_2独立且分别有密度$f_1(x_1)$，$f_2(x_2)$，则$\eta=\xi_1/\xi_2$分布密度为

$$f_\eta(x)=\int_0^{\infty} zf_1(zx)f_2(z)dz-\int_{-\infty}^{0} zf_1(zx)f_2(z)dz$$

3. **χ^2分布$\chi^2(\nu)$**

若ξ_1，ξ_2，…，ξ_ν为独立同分布$N(0,1)$随机变量，则

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i^2$$

称服从自由度（或参数）为ν的χ^2分布$\chi^2(\nu)$。

为求χ^2密度，先算$\xi=\chi/\sqrt{\nu}$的分布函数$\Phi(y)$。因$y<0$时，$\Phi(y)=P(\xi<y)=0$；$y\geqslant 0$则

$$\Phi(y)=P(\xi<y)=P(\chi/\sqrt{\nu}<y)=P(\chi^2<\nu y^2)$$

因$\xi_i\sim N(0,1)$，故

$$\Phi(y)=P(\Sigma\xi_i^2<\nu y)=\int\cdots\int_{\Sigma x_i^2<\nu y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\nu} e^{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2}\,dx_1\cdots dx_\nu$$

作变换

$$x_1=\rho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{\nu-1}$$
$$x_2=\rho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\sin\theta_{\nu-1}$$
$$\cdots$$
$$x_\nu=\rho\sin\theta_1$$

得

$$\Phi(y)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{y\sqrt{\nu}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\nu} e^{-\frac{\rho^2}{2}}$$

$$\cdot \rho^{\nu-1} D(\theta_1, \cdots, \theta_{\nu-1}) d\rho d\theta_{\nu-1} \cdots d\theta_1$$

其中 $\rho^{\nu-1}D(\theta_1, \cdots, \theta_{\nu-1})$为变换雅可比行列式。记

$$c_\nu = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^\nu \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(\theta_1, \cdots, \theta_{\nu-1}) d\theta_{\nu-1} \cdots d\theta_1$$

则

$$\Phi(y) = c_\nu \int_0^{y\sqrt{\nu}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{\nu-1} d\rho$$

由 $\Phi(+\infty)=1$，可得 $c_\nu^{-1} = 2^{\frac{\nu}{2}-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$，于是

$$\Phi(y) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{y\sqrt{\nu}} \rho^{\nu-1} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho$$

从而 $\xi = \chi/\sqrt{\nu}$ 分布密度

$$\varphi(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\nu}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(y\sqrt{\dfrac{\nu}{2}}\right)^{\nu-1} e^{-\frac{\nu}{2}y^2}, & y \geqslant 0 \\ 0 & , y < 0 \end{cases}$$

于是 $\chi^2(\nu)$分布密度（图3.9）

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geqslant 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

实际工作中，当给定α时，常须求出满足$P(\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha) = \alpha$中$\chi^2_\alpha$，其值见附表 2。

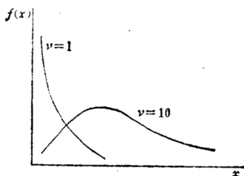


图3.9 χ^2分布

4. t 分布 t(ν)

若 $\xi \sim N(0,\ 1)$，$\nu\eta^2 \sim \chi^2(\nu)$独立，则

$t=\xi/\eta$

称服从自由度 ν 的t分布 $t(\nu)$。

因 ξ 与 η 分布密度

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2\nu}}{\Gamma(\nu/2)}\left(y\sqrt{\dfrac{\nu}{2}}\right)^{\nu-1}e^{-\frac{\nu}{2}y^2}, & y\geqslant 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

由商的分布，得

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}z\left(\exp\left(-\frac{1}{2}x^2z^2\right)\right)\frac{\sqrt{2\nu}}{\Gamma(\nu/2)}\left(\sqrt{\frac{\nu}{2}}z\right)^{\nu-1}$$

$$\cdot\exp\frac{-\nu z^2}{2}dz=\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)}\int_0^\infty\left(\sqrt{\frac{\nu}{2}}z\right)^{\nu-1}$$

$$\cdot\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\nu z^2\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)\right)\right)\nu z dz$$

作变换 $u=\dfrac{1}{2}\nu z^2\left(\dfrac{x^2}{\nu}+1\right)$，得

$$=\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)}\left(\frac{x^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\int_0^{\infty} u^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-u}\,du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\left(\frac{x^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad (3.26)$$

t 分布密度图形如图 3.10。

实际工作中，给定 p，须求出 $P(|t|\leqslant t_p)=p$ 中 t_p 值，其值见附表 3。

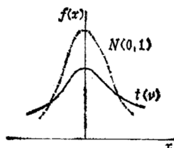


图3.10 t 分布

5. F 分布 F(ν₁, ν₂)

若 $\nu_1\xi\sim\chi^2(\nu_1)$，$\nu_2\eta\sim\chi^2(\nu_2)$，则

$$F=\frac{\xi}{\eta}$$

称服从自由度 ν_1，ν_2 的 F 分布 $F(\nu_1,\ \nu_2)$。

因 $\xi=\chi^2(\nu_1)/\nu_1$ 的密度

$$f_\xi(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\nu_1/2}\Gamma(\nu_1/2)}\nu_1^{\nu_1/2}y^{\frac{\nu_1}{2}-1}\,e^{-\frac{1}{2}\nu_1 y}, & y\geqslant 0\\ 0 & ,\ y<0\end{cases}$$

于是 $F=\xi/\eta$ 的密度当 $x\geqslant 0$ 时为

$$f(x)=c\int_0^{\infty} z(xz)^{\frac{\nu_1}{2}-1}\,e^{-\frac{1}{2}\nu_1 xz}\,z^{\frac{\nu_2}{2}-1}\,e^{-\frac{1}{2}\nu_2 z}\,dz$$

$$=cx^{\frac{\nu_1}{2}-1}\int_0^{\infty} z^{\frac{\nu}{2}-1}\,e^{-\frac{1}{2}z(\nu_1 x+\nu_2)}\,dz$$

其中 $\nu=\nu_1+\nu_2$，$c=\dfrac{1}{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}\nu_1^{\nu_1/2}\nu_2^{\nu_2/2}$，记 $y=z(\nu_1x+\nu_2)$，则

$$f(x)=\frac{1}{(\nu_1x+\nu_2)^{\nu/2}}cx^{\frac{\nu_1}{2}-1}\int_0^\infty y^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{(\nu_1x+\nu_2)^{\nu/2}}cx^{\frac{\nu_1}{2}-1}2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$$

于是 $F(\nu_1,\ \nu_2)$的分布密度（图3.11）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}\dfrac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_2+\nu_1x)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}\tag{3.27}$$

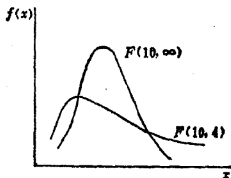


图3.11 F分布

实际工作中，已知α，常须求出$P(F\geqslant F_\alpha)=\alpha$中$F_\alpha$值，其值见附表4。

第四章　数字特征与特征函数

第一节　随机变量的数字特征

对于随机变量，经常要用它的数字特征。

定义　若随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$，而

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

绝对收敛，则称它为 ξ 的期望，记为 $E(\xi)$ 或 $E\xi$，也简记为 E。

当 ξ 为离散型时

$$E(\xi)=\Sigma P_i x_i \tag{4.1}$$

当 ξ 为连续型时

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{4.2}$$

期望是以概率为权的对测量值的加权平均，它是平均概念的推广。

定义　如 $\psi(x)$ 连续，则 $\psi(x)$ 的期望指

$$E\{\psi(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx \tag{4.3}$$

特别有：

ξ 的 k 阶原点矩　$\alpha_k=E(\xi^k)$；

ξ 的 k 阶中心矩　$\mu_k=E\{(\xi-E\xi)^k\}$；

ξ 的 k 阶原点绝对矩　$E\{|\xi|^k\}$；

ξ 的 k 阶中心绝对矩　$\beta_k=E\{|\xi-E\xi|^k\}$；

ξ的 2 阶中心矩称为ξ的方差

$$V(\xi)=E\{(\xi-E\xi)^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2dF(x)$$

当ξ为离散型时

$$V(\xi)=\Sigma P_i(x_i-E\xi)^2$$

当ξ为连续型时

$$V(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2f(x)dx$$

方差的正平方根称为标准差或均方根差，即

$$\sigma(\xi)=\sqrt{V(\xi)}$$

而$V(\xi)$，$\sigma(\xi)$有时亦简记为$V\xi$，$\sigma\xi$或V，σ。

连续型随机变量的中位数M_e及众数M_0指

$$\int_{-\infty}^{M_e}f(x)dx=\frac{1}{2}$$

$$f(M_0)=\max$$

故偶然误差δ的或然误差ρ为$|\delta|$的中位数。

例 1 标准正态分布$N(0,1)$之密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

其期望

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)=0$$

这是因为被积函数是奇函数。而方差

$$V(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-0)^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}de^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$=(0-0)+1=1$$

例 2 正态分布$N(a,\ \sigma^2)$之密度

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2}$$

其期望

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2}dx$$

作代换 $z=(x-a)/\sigma$，则

$$E(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=a$$

其方差

$$V(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-z^2/2}dz=\sigma^2$$

第二节　随机向量的数字特征

定义 随机向量$\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdot,\ \xi_n)'$的期望指

$$E\xi=(E\xi_1,\ E\xi_2,\ \cdot,\ E\xi_n)'$$

随机向量的方差阵指

$$
V\xi=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdot & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdot & \sigma_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdot & \sigma_{nn}\end{pmatrix}
$$

而

$$
\sigma_{ij}=E\{(\xi_i-E\xi_i)(\xi_j-E\xi_j)\}
$$

称为 ξ_i, ξ_j 间协方差或相关矩、

方阵 $V\xi$ 具有：

1. 对称性：$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$。

2. 非负定性：即对任意实数 a_1, …, a_n 有

$$
\sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \sigma_{jk}\geqslant 0
$$

这因为

$$
\sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \sigma_{jk}=\int\cdots\int\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j(x_j-E(\xi_j))\right\}^2 dF(x_1,\cdots,x_n)
$$

$$
=E\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j(\xi_j-E(\xi_j))\right\}\geqslant 0
$$

当随机变量 ξ_1, …, ξ_n 间没有线性关系（以概率1）时，$V\xi$ 正定。

定义 若有两个随机变量 ξ_1, ξ_2, 且 $V(\xi_1)>0$, $V(\xi_2)>0$, 则称

$$
\rho_{12}=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{E\{(\xi_1-E(\xi_1))(\xi_2-E(\xi_2))\}}{\sqrt{E\{(\xi_1-E(\xi_1)\}^2\cdot E\{\xi_2-E(\xi_2)\}^2}} \tag{4.4}
$$

为 ξ_1 与 ξ_2 的相关系数。

例　二维正态向量 (ξ_1, ξ_2)，其密度

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

则因 $\xi_1\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$\xi_2\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，故

$$\sigma_{12}=\iint(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)f(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int\exp\left\{\frac{-(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dx_2\int(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)\exp\left\{\frac{-1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}-r\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}dx_1$$

令

$$z=\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}-r\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right),\ t=\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}$$

则

$$\sigma_{12}=\frac{1}{2\pi}\iint(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}tz+r\sigma_1\sigma_2t^2)\exp\left\{-\frac{t^2}{2}-\frac{z^2}{2}\right\}dzdt=\frac{r\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int t^2e^{-t^2/2}dt\int e^{-z^2/2}dz$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}\int te^{-t^2/2}dt\int ze^{-z^2/2}dz$$

$$=r\sigma_1\sigma_2$$

$$\rho_{12}=r$$

第三节　期望方差相关系数性质

设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为随机变量，$a, b, c, a_1, \cdots, a_n$ 为常数，则有下列性质。

一、期望性质

性质 1　$E(c)=c$

证　因 $E(\xi)=\sum x_i P_i=c\cdot 1=c$。

性质 2　$E(a\xi)=aE(\xi)$

证　因 $E(a\xi)=\int axdF(x)=a\int xdF(x)=aE(\xi)$.

性质 3　$E(\xi_1+\cdots+\xi_n)=E(\xi_1)+\cdots\cdots+E(\xi_n)$

证　设 $n=2$ 且 (ξ_1, ξ_2) 及 ξ_1, ξ_2 的分布函数分别为 $F(x_1, x_2)$，$F_1(x_1)$，$F_2(x_2)$，则

$$E(\xi_1+\xi_2)=\iint(x_1+x_2)dF(x_1, x_2)$$

$$=\iint x_1dF(x_1, x_2)+\iint x_2dF(x_1, x_2)$$

$$=\int x_1dF_1(x_1)+\int x_2dF_2(x_2)=E\xi_1+E\xi_2$$

值得注意，本性质不论随机变量独立或不独立皆成立。

性质 4　$E(a\xi+b)=aE(\xi)+b$

证　因 $E(a\xi+b)=E(a\xi)+E(b)=aE(\xi)+b$。

性质 5　当各 ξ_i 独立时，$E(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)=E(\xi_1)E(\xi_2)\cdots E(\xi_n)$

证　以 ξ_i 为连续型为例，因

$$E(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)=\int\cdots\int x_1x_2\cdots x_nf(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int x_1 f_1(x_1)dx_1\int x_2 f_2(x_2)dx_2\cdots\int x_n f_n(x_n)dx_n$$
$$=E(\xi_1)E(\xi_2)\cdots E(\xi_n)$$

二、方差性质

性质 1 $V(\xi)=E(\xi^2)-(E(\xi))^2$

证 $V(\xi)=E(\xi-E(\xi))^2=E\{\xi^2-2\xi E(\xi)+(E(\xi))^2\}$ $=E(\xi^2)-(E(\xi))^2$

性质 2 $V(c)=0$

证 $Vc=c^2\cdot 1-(c)^2=0$

性质 3 $V(a\xi)=a^2V(\xi)$

证 $V(a\xi)=E\{a\xi-E(a\xi)\}^2=a^2E\{\xi-E(\xi)\}^2=a^2V(\xi)$

性质 4 $V(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)=V(\xi_1)+V(\xi_2)+\cdots$

$$+V(\xi_n)+2\sum_{i<j}\sigma_{ij}$$

证 以 $n=2$ 为例，因

$$V(\xi_1+\xi_2)=E\{\xi_1+\xi_2-E(\xi_1+\xi_2)\}^2$$
$$=E\{\xi_1-E(\xi_1)\}^2+E\{\xi_2-E(\xi_2)\}^2+2E\{(\xi_1-E(\xi_1))(\xi_2-E(\xi_2))\}$$
$$=V(\xi_1)+V(\xi_2)+2\sigma_{12}$$

性质 5 若 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 独立，则

(1) $V(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)=V(\xi_1)+V(\xi_2)+\cdots+V(\xi_n)$

证 因 $\sigma_{ij}=E\{(\xi_i-E(\xi_i))(\xi_j-E(\xi_j))\}$
$$=E(\xi_i\xi_j)-(E\xi_i)(E\xi_j)$$

由期望性质 5，$E(\xi_i\xi_j)=E(\xi_i)E(\xi_j)$，于是 $\sigma_{ij}=0$，按性质 4 得证。

(2) $V(a_1\xi_1+\cdots+a_n\xi_n)=a_1^2V(\xi_1)+\cdots+a_n^2V(\xi_n)$

（8） $V\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}V(\xi_1)+\cdots+\frac{1}{n^2}V(\xi_n)$

三、相关系数性质

性质 1 $-1\leqslant\rho_{12}\leqslant+1$

证 对任意实值 t

$$E\{[t(\xi_1-E(\xi_1))+(\xi_2-E(\xi_2))]^2\}$$
$$=t^2\sigma_1^2+2t\sigma_{12}+\sigma_2^2\geqslant0$$

于是$\sigma_{12}^2-\sigma_1^2\sigma_2^2\leqslant0,-\sigma_1\sigma_2\leqslant\sigma_{12}\leqslant\sigma_1\sigma_2,-1\leqslant\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}=\rho_{12}\leqslant1$.

性质 2 若 ξ_1，ξ_2 独立，则 $\rho_{12}=0$.

证 当 ξ_1，ξ_2 独立，$\sigma_{12}=0$，从而得证。

注意，独立必无关，但无关不一定独立。对于正态分布，独立与无关才等价。

性质 3 $|\rho_{12}|=1$ 的充要条件是 ξ_1 和 ξ_2 以概率 1 线性相关。

证 充分性：设 $\xi_2=a\xi_1+b$（以概率 1），则

$$\sigma_{12}=E\{(\xi_1-E(\xi_1))(\xi_2-E(\xi_2))\}$$
$$=E\{(\xi_1-E(\xi_1))(a\xi_1+b-aE(\xi_1)-b)\}=a\sigma_1^2$$

又因 $\sigma_2^2=a^2\sigma_1^2$，故

$$\rho_{12}=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{a\sigma_1^2}{\sigma_1|a|\sigma_1}=\frac{a}{|a|}$$

当 $a>0$ 时 $\rho_{12}=1$，当 $a<0$ 时 $\rho_{12}=-1$.

再证必要性。因

$$V\left(\frac{\xi_1}{\sigma_1}\pm\frac{\xi_2}{\sigma_2}\right)=2(1\pm\rho_{12})$$

由于方差只有在随机变量以概率 1 取常数 c 时才为 0，故$\frac{\xi_1}{\sigma_1}$

$\pm\frac{\xi_2}{\sigma_2}=c$（以概率1）。

第四节 特征函数

为更好研究随机变量，我们需要研究它的特征函数。

定义 设随机变量的分布函数为$F(x)$，称

$$\theta(t)=E(e^{it\xi})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x) \tag{4.5}$$

为ξ的特征函数。其中t为实数而$i=\sqrt{-1}$是虚数单位。

因$|e^{itx}|=1$，故一切随机变量的特征函数存在。

显然，对离散型随机变量

$$\theta(t)=\Sigma e^{itx_i}P_i$$

对连续型随机变量

$$\theta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)dx$$

性质1 若$\eta=a\xi+b$，其中a，b为常数，则

$$\theta_\eta(t)=e^{ibt}\theta_\xi(at) \tag{4.6}$$

证 因$\theta_\eta(t)=E(e^{it\eta})=E(e^{it(a\xi+b)})=e^{itb}E(e^{ita\xi})$
$=e^{itb}\theta_\xi(at)$.

性质2 独立随机变量之和的特征函数等于各特征函数之积。

证 以两个独立随机变量ξ_1，ξ_2为例，若$\eta=\xi_1+\xi_2$，因$e^{it\xi_1}$与$e^{it\xi_2}$独立，于是

$$\theta_\eta(t)=E(e^{it\eta})=E(e^{it(\xi_1+\xi_2)})=E(e^{it\xi_1})E(e^{it\xi_2})$$
$$=\theta_{\xi_1}(t)\theta_{\xi_2}(t)$$

性质3 若随机变量ξ有n阶绝对矩，则其特征函数可微分n次，且当$k\leqslant n$时

$$\theta^{(k)}(0)=i^k E(\xi^k)$$

证 因 $\left|\int x^k e^{itx}dF(x)\right| \leqslant \int |x|^k dF(x)$ 有界，故

$$\int \frac{d^k}{dt^k}(e^{itx})dF(x)=i^k\int x^k e^{itx}dF(x),\ k\leqslant n \text{存在，而}$$

$$\theta^{(k)}(t)=i^k\int x^k e^{itx}dF(x)$$

$$\theta^{(k)}(0)=i^k E(\xi^k)$$

性质 4 $\theta(-t)=\overline{\theta(t)}$

证 因 $\theta(-t)=\int e^{-itx}dF(x)=\int \overline{e^{itx}dF(x)}=\overline{\theta(t)}$

性质5 特征函数在 $(-\infty, \infty)$ 上一致连续，且[4]

$$\theta(0)=1,\ |\theta(t)|\leqslant 1$$

例 求标准正态分布 $N(0, 1)$ 的特征函数。

因密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

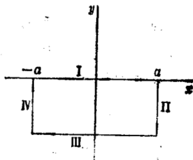


图 4.1 正态分布特征函数积分

故

$$\theta(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}dx$$

后一积分是复函数 $e^{-z^2/2}dz$ 在复平面沿平行于实轴的直线 $y=-it$ 积分（图4.1）。

考虑环路 $c=\{-a\to a\to a-it\to -a-it\to a\}$，它由 I → IV 段组成，因被积函数在 c 中解析，由柯西定理

$$\int_c e^{-z^2/2}dz=0$$

令 $z=x+iy$，在Ⅱ，Ⅳ上因 $|x|=a$，$y^2\leqslant t^2$，故

$$|e^{-\frac{z^2}{2}}|=|e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-ixy}|\leqslant|e^{-\frac{a^2}{2}}||e^{\frac{t^2}{2}}|\cdot 1=e^{-\frac{a^2}{2}+\frac{t^2}{2}}\to 0 \quad (a\to\infty)$$

故

$$\int_{\infty}^{-\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}dx+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

$\theta(t)=e^{-t^2/2}$

当 $\xi\sim N(a,\ \sigma^2)$时，由$\xi=\sigma\eta+a$ ($\eta\sim N(0,\ 1)$)可知其

$$\theta(t)=e^{iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2} \tag{4.7}$$

第五节　半不变量

定义　将ξ的特征函数取自然对数后展成it的幂级数，即

$$\ln\theta(t)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\varkappa_s}{s!}(it)^s \tag{4.8}$$

则称 $\varkappa_s$ 为 ξ 的 s 阶半不变量。

半不变量与中心矩间有关系

$\varkappa_1=E$

$\varkappa_2=\mu_2=\sigma^2$

$\varkappa_3=\mu_3$

$\varkappa_4=\mu_4-3\mu_2^2$

$\varkappa_5=\mu_5-10\mu_2\mu_3$

性质 1 若 $\eta=a\xi+b$，则 η 与 ξ 的半不变量 $\varkappa'$ 与 $\varkappa$ 满足 $\varkappa_1'=a\varkappa+b$；$\varkappa_s'=a^s\varkappa_s$ 当 $s>1$

证 因 $\ln\theta_\eta(t)=\ln e^{ibt}\theta_\xi(at)$，故 $\Sigma\frac{\varkappa_s'}{s!}(it)^s=ibt+\Sigma\frac{\varkappa_s}{s!}(iat)^s$.

于是，当 $\eta=\xi+b$，除 $\varkappa_1'$ 外其余 $\varkappa_s'$ 均不变，这就是半不变量名称的来源。

性质 2 独立随机变量之和的半不变量等于半不变量之和。

证 因 $\ln\theta(t)=\Sigma\ln\theta_i(t)$

定义 称

$$\gamma_1=\varkappa_3/\sigma^3,\quad \gamma_2=\varkappa_4/\sigma^4 \tag{4.9}$$

为随机变量的偏倚系数与超越系数。显然

$$\gamma_1=\mu_3/\sigma^3,\quad \gamma_2=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3 \tag{4.10}$$

例 因当 $\xi\sim N(a,\ \sigma^2)$ 时

$$\theta(t)=\exp\left\{iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right\}$$

$$\ln\theta(t)=iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\varkappa_s}{s!}(it)^s$$

由比较 it 同幂系数，知

$$\varkappa_1=a,\quad \varkappa_2=\sigma^2,\quad \kappa_3=\kappa_4=\cdots=0$$

于是

$$\gamma_1=0,\quad \gamma_2=0$$

具有 $\gamma_1\neq0$，$\gamma_2\neq0$ 的随机变量分布密度如图 4.2

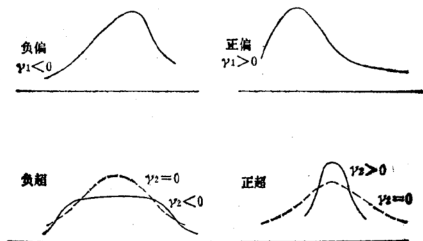


图4.2　非正态分布的偏倚与超越

第六节　分布函数与特征函数

唯一性定理　分布函数由其特征函数唯一决定[8]。

由这一定理可知，随机变量的分布函数与其特征函数之间存在着一一对应关系。

当特征函数 $\theta(t)$ 在 $(-\infty,\ \infty)$ 绝对可积，那么对应的分布是连续型的，且其密度

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\theta(t)dt$$

即 f 与 θ 构成傅里叶变换对。

定义　对分布函数列 $\{F_n(x)\}$，如存在函数 $F(x)$，使

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$$

在 $F(x)$ 每一连续点成立，则称 $F_n(x)$ 弱收敛于 $F(x)$。

定理　设分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于某一分布函数 $F(x)$，则相应的特征函数列 $\{\theta_n(t)\}$ 收敛于特征函数 $\theta(t)$，且

在 t 的任一有限区间内收敛是一致的。又若特征函数列 $\{\theta_n(t)\}$ 收敛于某一连续函数 $\theta(t)$，则相应的分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于某一分布函数 $F(x)$[6]。

第五章　概率论一些定理

第一节　小概率原理

概率很小的事件，在一次实验中是不会发生的，如果根据所作假设，正确地算出事件A的概率很小，而在一次实验中，事件A竟然出现了，则我们认为所作假设不正确而将假设推翻，这就是小概率原理，也叫实际判断原理。

如服从正态分布的偶然误差δ，其绝对值大于标准差σ三倍的概率

$$P(|\delta|>3\sigma)=0.0027$$

是一个很小的概率，因此在一次实验中，误差绝对值大于3σ是不可能发生的，若实验中竟出现了大于3σ的误差，该误差可认为是粗差。

第二节　大数定律与契贝雪夫不等式

大数定律　若ξ_1, …, ξ_n为独立、同分布具有限期望a的随机变量，则对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim P\left\{\left|\frac{1}{n}\Sigma\xi_k-a\right|<\varepsilon\right\}=1 \tag{5.1}$$

此定律的意义在于：当我们对某量a进行n次独立测量得ξ_1, …, ξ_n，如测量只有偶然误差，即$E\xi_i=a$，则当测量次数足够多，可用平均值$\frac{1}{n}\Sigma\xi_k$代替该量值a[6]。

契贝雪夫不等式 对任何具有限方差$V(\xi)$的随机变量ξ，有[6]

$$P\{|\xi-E(\xi)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{V(\xi)}{\varepsilon^2} \tag{5.2}$$

其中ε为一正数。

由这一不等式可知，对偶然误差，不论其服从何种分布，皆有

$$P\{|\delta|\geqslant 3\sigma\}\leqslant\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{1}{9}$$

第三节 中心极限定理

测量值ξ服从正态分布，指其出现的概率分布密度$f(x)$与分布函数$F(x)$为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

其中μ为ξ的期望，σ为ξ的标准差。记为$\xi\sim N(\mu,\ \sigma^2)$。

偶然误差δ服从正态分布，指$\delta\sim N(0,\sigma^2)$。

由中心极限定理，大量、独立、均匀小的因素所致结果的误差服从正态分布，而一般测量工作均满足这一条件，所以在高斯找到正态分布的数学形式后，在一百多年来的误差理论中，它得到了广泛的应用。

中心极限定理可用下面两个形式表述。

定理1 如有独立误差列δ_1，δ_2，…，δ_n，…，记δ_k的

分布函数为 $F_k(x)$，方差为 σ_k^2，$B_n=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}$，若各$\delta_k$的期望为0，当对任何$\tau>0$满足林德伯尔格条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\tau B_n}x^2dF_k(x)=0$$

则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k<x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

即$\sum_{k=1}^{n}\delta_k$除以其标准差B_n所得标准化变量之分布趋于$N(0,1)$分布，于是δ_1，δ_2，…的和$\sum_{k=1}^{n}\delta_k$的分布趋于正态分布$N(0, B_n^2)$。

此定理证明可参看文献[7]。

我们来看林德伯尔格条件的意义。由于

$$\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\delta_k|>\tau B_n\}\subseteq\{|\delta_1|>\tau B_n\}+\cdots+\{|\delta_n|>\tau B_n\}$$

故

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\delta_k|>\tau B_n)\leqslant\sum_{k=1}^{n}P(|\delta_k|>\tau B_n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\tau B_n}dF_k(x)$$

$$<\frac{1}{\tau^2B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\tau B_n}x^2dF_k(x)$$

而条件意味着，对任何 $\tau>0$，有

$$\lim P\left(\max\frac{|\delta_k|}{B_n}>\tau\right)=0$$

或

$$\lim P\left(\max\frac{|\delta_k|}{B_n}\leqslant\tau\right)=1$$

即 n 充分大后，各误差 δ_k 与 B_n 相比，都均匀地小。或说 n 充分大后，独立均匀小的误差 δ_k 之和 $\Sigma\delta_k$ 趋于正态分布。这在实际工作中可理解为大量、独立、数值差不多的误差和为正态分布。

定理 2 如有独立误差列 δ_1，δ_2，…，δ_n，…，各 δ_k 分布相同，皆有期望 0，方差 σ^2 有限且不为 0，则 $\sum_{k=1}^{n}\delta_k$ 分布趋于正态分布 $N(0, \sigma^2 n)$。

证 由定理 1，因

$$B_n=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}=\sigma\sqrt{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{B_n^2}\int_{|x|>\tau B_n}x^2dF_k(x)$$

$$=\frac{1}{n\sigma^2}n\int_{|x|>\tau B_n}x^2dF_k(x)$$

因 $\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF_k(x)=\sigma^2$ 有限，故上式趋于 0，得证。

定理 2 亦可不用定理 1 而用特征函数证明如下。

因 $E(\delta_k)=0$，$\sigma(\delta_k)=\sigma$，且 $\theta^{(k)}(0)=i^kE\delta_k^k$，故 δ_k 的特征函数在 $t=0$ 附近用台劳级数可展为

$$\theta_\delta(t)=1-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+o(t^2)$$

对 $Z_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\delta_k$，其特征函数

$$\theta(t)=\left(\theta_\delta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n=\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n$$

令 $u=-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)$，则

$$\ln\theta(t)=n\ln(1+u)=-\frac{t^2}{2}+no\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

因对任何有限数 t，$\lim no\left(\frac{t^2}{n}\right)=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\ln\theta(t)=-\frac{t^2}{2}$$

$$\lim\theta(t)=e^{-t^2/2}$$

故 $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Sigma\delta_k$ 分布函数趋于 $N(0,\ 1)$ 分布函数，从而 $\Sigma\delta_k$ 分布趋于正态分布 $N(0,\ \sigma^2n)$。

以均匀分布为例，我们来看多个独立均匀分布之和趋于正态分布情况。

若 δ_k 服从均匀分布，其分布密度

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则 $\eta=\sum_{k=1}^{n}\delta_k$ 之分布函数

$$F(y)=\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{\left[y+\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\binom{n}{r}\left(y+\frac{n}{2}-r\right)^n$$

而 $[a]$ 为 a 的整数部分。

可以算出 η 的标准化变量 $\eta\Big/\sqrt{\frac{n}{12}}$ 的分布函数 $F_n(x)$，列出[8]

$$Q_n(x)=1-F_n(x)$$

如附表 5。

由附表 5 算出 η 与正态分布的概率差最大值 ΔQ_M 如表 5.1。

表5.1　均匀分布与正态分布概率差

n	2	3	4	5	6
ΔQ_M	0.01644	0.00983	0.00738	0.00569	0.00474
n	7	8	9	10	12
ΔQ_M	0.00404	0.00352	0.00312	0.00280	0.00232

由表 5.1 可见，10个以上均匀分布之和与正态分布概率差小于 0.003，5 个以上均匀分布之和与正态分布概率差小于0.005。

不限于均匀分布，任意分布 n 个之和与正态分布概率差小于

$$\max\left|P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\delta_k<x\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right|<0.82\frac{E|\delta_k|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

其中σ与$E|\delta_k|^3$为该任意分布随机变量之标准差与三阶绝对矩。

故随n的增大，$\Sigma\delta_k$的分布与正态分布的差异将缩小。

一般认为，当误差受到数值差不多即无特别大的几个独立因素影响，当因素在15个以上时，可以认为误差服从正态分布，若要求不高，因素在5个以上也可。

第六章　正态分布及有关分布

第一节　正 态 分 布

测量值服从正态分布，指其分布密度与分布函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6.1}$$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

其期望与标准差

$$E=\mu,\qquad \sigma=\sigma$$

其中μ表示分布的位置，σ表示分布的分散性（图6.1）。

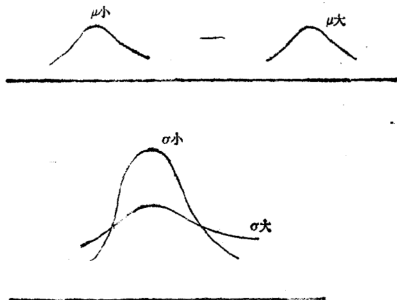


图6.1　正态分布参数意义

正态分布以其 μ，σ 表示其全部特征，记为 $N(\mu, \sigma^2)$。

$N(\mu, \sigma^2)$ 的各阶半不变量

$$\kappa_1=0, \quad \kappa_2=\sigma^2, \quad \kappa_3=\kappa_4=\cdots=0$$

偏倚系数与超越系数

$$\gamma_1=0, \qquad \gamma_2=0$$

由于正态分布密度曲线关于期望对称，故奇数阶中心矩

$$\mu_{2k+1}=0$$

而偶数阶中心矩

$$\mu_{2k}=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}x^{2k}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}dx$$

作代换 $y=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2$，得

$$\mu_{2k}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^{2k}2^k\int_0^{\infty}y^{\frac{2k-1}{2}}e^{-y}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^{2k}2^k\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)$$

$$=\sigma^{2k}(2k-1)(2k-3)\cdots3\cdot1=\sigma^{2k}(2k-1)!!$$

而中心绝对矩

$$E|\xi-E\xi|^k=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^k2^{k/2}\int_0^{\infty}y^{\frac{k-1}{2}}e^{-y}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^k2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

当 $k=1$，得正态分布偶然误差的平均误差

$$\vartheta=E|\xi-E\xi|=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

其特征函数

$$\theta(t)=\exp\left\{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right\}$$

因两独立正态分布变量$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$特征函数之积为$\exp\left\{i(\mu_1+\mu_2)t-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2\right\}$，故两独立正态分布变量$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$之和仍为正态分布变量$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，即对正态分布成立加法定理

$$N(\mu_1,\sigma_1^2)*N(\mu_2,\sigma_2^2)=N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

服从正态分布的偶然误差是一个服从$N(0,\sigma^2)$的随机变量。

我们称$N(0,1)$为标准正态分布，其分布密度与分布函数特别记为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$$

第二节　正态分布的计算

对$N(\mu,\sigma^2)$变量，因

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

故一般正态分布概率计算，可化为标准正态分布的概率计算。

下面列出一些$N(0,1)$概率常用计算式。

1. 将$e^{-t^2/2}$展成幂级数，可得

$$P(|\xi|\leqslant t)=\Phi(t)-\Phi(-t)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(t-\frac{t^3}{1!2\times3}+\frac{t^5}{2!2^2\times5}-\frac{t^7}{3!2^3\times7}+\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!2^n(2n+1)}$$

2. 渐近式

注意 $de^{-x^2/2}=-xe^{-x^2/2}dx$，由分部积分

$$\int e^{-x^2/2}dx=\int\frac{-1}{x}de^{-x^2/2}$$

$$=\frac{-1}{x}e^{-x^2/2}-\int e^{-x^2/2}\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\frac{-1}{x}e^{-x^2/2}+\int\frac{1}{x^3}de^{-x^2/2}$$

$$=-\frac{1}{x}e^{-x^2/2}+\frac{1}{x^3}e^{-x^2/2}$$

$$-\frac{3}{x^5}e^{-x^2/2}-\int\frac{3\times 5}{x^6}e^{-x^2/2}dx$$

因 $-\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$，$\frac{1}{x^3}e^{-x^2/2}$ 当 $x=\infty$ 时为 0，故得

$$P(|\xi|>t)=\frac{2}{t\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\Big(1-\frac{1}{t^2}+\frac{1\times 3}{t^4}$$

$$-\frac{1\times 3\times 5}{t^6}+\cdots+(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{t^{2n}}\Big)+R_n$$

$$R_n=2(-1)^{n+1}1\times 3\times\cdots\times(2n+1)\int_t^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^{2n+2}}dx$$

而 $|R_n|$ 小于略去第一项的绝对值。注意

$$t^{2n}|R_n|/2<t^{2n}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{t^{2n+2}}\int_t^{\infty}\varphi(x)dx\to 0$$

（当 $t\to\infty$）

故 $P(|\xi|>t)$ 展为渐近级数。

3. 一些近似式[9]

(1) $\Phi(t)=1-\varphi(t)(a_1y+a_2y^2+a_3y^3)+e(t)$

其中 $y=\dfrac{1}{1+pt}$，$|e(t)|<1\times10^{-5}$，且

$p=0.33267$，　　$a_1=0.43618\ 36$

$a_2=-0.1201676$，　　$a_3=0.93729\ 80$

(2) $\Phi(t)=1-\varphi(t)(b_1y+b_2y^2+b_3y^3+b_4y^4+b_5y^5)+e(t)$

其中 $y=\dfrac{1}{1+pt}$，$|e(t)|<7.5\times10^{-8}$，且

$p=0.23164\ 19$，　　$b_1=0.31938\ 1530$

$b_2=-0.35656\ 3782$，$b_3=1.78147\ 7937$

$b_4=-1.82125\ 5978$，$b_5=1.33027\ 4429$

(3) $\Phi(t)=1-\dfrac{1}{2}(1+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+c_4t^4)^{-4}+e(t)$

其中 $|e(t)|<2.5\times10^{-4}$，且

$c_1=0.196854$，　　$c_2=0.115194$

$c_3=0.000344$，　　$c_4=0.019527$

(4) $\Phi(t)=1-\dfrac{1}{2}(1+d_1t+d_2t^2+d_3t^3+d_4t^4+d_5t^5+d_6t^6)^{-16}+e(t)$

其中 $|e(t)|<1.5\times10^{-7}$，且

$d_1=0.04986\ 73470$，$d_2=0.02114\ 10061$

$d_3=0.00327\ 76263$，$d_4=0.00003\ 80036$

$d_5=0.00004\ 88906$，$d_6=0.00000\ 53830$

4. 分位点

若 $Q(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt$，当 $0<p\leqslant0.5$ 时，满足

$Q(x_p)=p$ 的分位点为

$$x_p=t-\frac{a_0+a_1t}{1+b_1t+b_2t^2}+\varepsilon(p)$$

其中 $t=\sqrt{\ln\frac{1}{p^2}}$，$|\varepsilon(p)|<3\times10^{-3}$，且

$a_0=2.30753$，$a_1=0.27061$

$b_1=0.99229$，$b_2=0.04481$

5. 例

例1 求 $N(\mu,\sigma^2)$ 变量在 $[\mu-\sigma,\ \mu+\sigma]$ 内概率。

因 $N(\mu,\sigma^2)$ 变量在 $[\mu-\sigma,\ \mu+\sigma]$ 内概率等于 $N(0,1)$ 变量在 $[-1,\ 1]$ 内概率。按幂级数展开式

$$P(|\xi|\leqslant1)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}+\cdots\right)$$

$$=0.6827$$

例2 求正态分布偶然误差的或然误差。

因对 $N(0,\ 1)$，由或然误差定义（误差落于正负或然误差范围内概率为 $\frac{1}{2}$），按分位点计算，取 $p=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，得 $t=\sqrt{\ln p^{-2}}\approx1.67$ 而或然误差

$$\rho=1.67-\frac{a_0+a_1t}{1+b_1t+b_2t^2}\approx\frac{2}{3}$$

故对标准差为 σ 的正态分布偶然误差，其或然误差

$$\rho\approx\frac{2}{3}\sigma$$

第三节　分布的正态展开

我们知道，正态分布是测量中一个基本分布，对它的研

究也比较成熟，因此对于不是正态分布的别的分布，我们希望将它与正态分布联系起来，这时可将别的分布作正态展开。

对任一随机变量ξ，若其期望为E，标准差为σ，则对$\eta=\frac{\xi-E}{\sigma}$，其分布密度可写为

$$f(x)=c_0\varphi(x)+c_1\varphi'(x)+\frac{c_2}{2!}\varphi''(x)+\frac{c_3}{3!}\varphi^{(3)}(x)$$

$$+\frac{c_4}{4!}\varphi^{(4)}(x)+\cdots$$

其中c_i为待定系数，$\varphi(x)$为$N(0,1)$密度，$\varphi'(x)$，$\varphi''(x)$，$\varphi^{(3)}(x)$，$\varphi^{(4)}(x)$为$\varphi(x)$之一阶、二阶、三阶、四阶导数等。

因

$$\varphi^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu}H_{\nu}(x)\varphi(x)$$

其中爱尔米特多项式

$$H_m(x)=(-1)^m e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}e^{-x^2/2}$$

由爱尔米特多项式正交性

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)\varphi(x)dx=\begin{cases}n!, & 当\ m=n\\ 0, & 当\ m\neq n\end{cases}$$

将$f(x)$的展开式两端乘$H_{\nu}(x)$，积分可得

$$c_{\nu}=(-1)^{\nu}\int_{-\infty}^{\infty}H_{\nu}(x)f(x)dx$$

因

$$H_0(x)=1$$
$$H_1(x)=x$$
$$H_2(x)=x^2-1$$

$$H_3(x)=x^3-3x$$
$$H_4(x)=x^4-6x^2+3$$

注意到 η 的期望为 0，标准差为 1，得

$$c_0=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$$

$$c_1=-\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=0$$

$$c_2=\int_{-\infty}^{\infty}(x^2-1)f(x)dx=1-1=0$$

$$c_3=-\int_{-\infty}^{\infty}(x^3-3x)f(x)dx=-E\eta^3$$

$$=-\frac{\mu_3}{\sigma^3}=-\gamma_1$$

$$c_4=\int_{-\infty}^{\infty}(x^4-6x^2+3)f(x)dx=E\eta^4-6E\eta^2+3$$

$$=E\eta^4-3=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\gamma_2$$

故取至 n^{-1} 阶可得

$$f(x)=\varphi(x)-\frac{1}{3}\gamma_1\varphi^{(3)}(x)+\frac{1}{4!}\gamma_2\varphi^{(4)}(x)+\frac{10}{6!}\gamma_1^2\varphi^{(6)}(x) \tag{6.2}$$

其中 γ_1，γ_2 为 ξ 之偏倚系数与超越系数。此级数称埃奇沃思 (Edgeworth) 级数。

第四节 χ^2分 布

当 $\xi_i\sim N(0,1)$ 独立，则 $\eta=\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i^2$ 称服从 χ^2 分布 $\chi^2(\nu)$。

$\chi^2(\nu)$ 分布密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}\right)}x^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{6.3}$$

性质 1 $\chi^2(\nu)$ 的 $E=\nu$, $\sigma=\sqrt{2\nu}$

证

$$E=\int_0^\infty xf(x)dx=\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty x\cdot x^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot 2^{\frac{\nu}{2}+1}\int_0^\infty\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\nu+2}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot 2^{\frac{\nu}{2}+1}\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)=\nu$$

又因

$$E\eta^2=\int_0^\infty x^2f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot 2^{\frac{\nu}{2}+2}\int_0^\infty\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\nu+4}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot 2^{\frac{\nu}{2}+2}\Gamma\left(\frac{\nu+4}{2}\right)=\nu(\nu+2)$$

$$\sigma^2=E\eta^2-E^2=2\nu$$

性质 2 $\chi^2(\nu)$ 的特征函数 $\theta(t)=(1-2it)^{-\nu/2}$

证

$$\theta(t)=Ee^{it\eta}=\int_0^\infty e^{itx}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^{\infty}x^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\left(\frac{1}{2}-it\right)x}dx$$

令 $z=x\left(\frac{1}{2}-it\right)$，则

$$\theta(t)=\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-it\right)^{\nu/2}}\int_0^{\infty}z^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-z}dz$$

$$=(1-2it)^{-\nu/2}$$

由特征函数，知对 χ^2 分布成立加法定理

$$\chi^2(\nu_1)*\chi^2(\nu_2)=\chi^2(\nu_1+\nu_2)$$

由 $f'(x)=\max$，可得 $\chi^2(\nu)$ 分布众数

$$x=\nu-2$$

并可求得原点矩

$$\alpha_r=\nu(\nu+2)\cdots(\nu+2r-2)$$

半不变量

$$\kappa_r=\nu 2^{r-1}(r-1)!$$

中心矩

$$\mu_2=2\nu$$

$$\mu_3=8\nu$$

$$\mu_4=48\nu+12\nu^2$$

$$\mu_5=32\nu(5\nu+12)$$

$$\mu_6=40\nu(3\nu^2+52\nu+96)$$

且满足

$$\mu_{j+1}=2j(\mu_j+\nu\mu_{j-1})$$

当 $\nu\to\infty$时，$\chi^2(\nu)$ 趋于正态分布，但较慢。

常用近似为

$$\sqrt{2\chi^2}\sim N(\sqrt{2\nu-1},\ 1)$$

$$\left\{\left(\frac{\chi^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{9\nu}-1\right\}\left(\frac{9\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sim N(0,1)$$

$\chi^2(\nu)$ 的分布函数

$$F(\chi^2)=\int_0^{\chi^2}\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot t^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(\chi^2/2)^{\frac{\nu}{2}+i}}{i!\left(\frac{\nu}{2}+i\right)}$$

又记 $Q(\chi^2)=1-F(\chi^2)$。若 $\chi^2(\nu)$ 与 $N(0,1)$ 上侧分位点相应概率相同，即若

$$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2/2}dt$$

而 $Q(\chi^2)=Q(x)$。则当 $\nu>30$ 时

$$x\approx\frac{(\chi^2/\nu)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2}{9\nu}\right)}{\sqrt{\frac{2}{9\nu}}}$$

$$\chi^2\approx\nu\left\{1-\frac{2}{9\nu}+x\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right\}^3$$

当 $\nu>100$ 时也可用

$$x\approx\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2\nu-1}$$

$$\chi^2\approx\frac{1}{2}\left\{x+\sqrt{2\nu-1}\right\}^2$$

第五节　t分　布

若 $\xi\sim N(0,1)$，$\nu\eta^2\sim\chi^2(\nu)$ 独立，则称

$$t=\xi/\eta$$

服从自由度为 ν 的 t 分布 $t(\nu)$。

$t(\nu)$ 分布密度为

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \tag{6.4}$$

性质 1 对 $t(\nu)$ 分布，其期望与标准差

$$E=0$$

$$\sigma=\frac{\nu}{\nu-2}，\text{当}\nu>2$$

证 因分布对称于原点，故 $E=0$。又

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}dx$$

因

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}dx$$

$$=\frac{\nu^{3/2}}{2}\int_0^{\infty}\left\{\left(\frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}-1}\Big/\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{\nu-2}{2}}\right\}d\frac{x^2}{\nu}$$

$$=\frac{\nu^{\frac{3}{2}}}{2}B\left(\frac{3}{2},\ \frac{\nu-2}{2}\right)$$

而上述积分当 $\nu\leqslant 2$ 时发散，当 $\nu>2$ 时

$$\sigma^2=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}}\cdot 2\cdot\frac{\nu^{3/2}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\nu}{\nu-2}$$

性质 2 若 $2r<\nu$，则中心矩与原点矩

$$\mu_{2r}=\alpha_{2r}=\frac{1\cdot 3\cdots(2r-1)\nu^r}{(\nu-2)(\nu-4)\cdots(\nu-2r)}$$

$$\mu_{2r+1}=\alpha_{2r+1}=0$$

又偏倚系数 $\gamma_1=0$，超越系数 $\gamma_2=\frac{6}{\nu-4}$（当 $\nu>4$）。

性质 3 当 $\nu\to\infty$，$t(\nu)$ 分布密度趋于 $N(0,1)$ 密度 $\varphi(x)$。

证 因 $\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^\nu\to e^{x^2}$，故

$$\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}=\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu}{2}}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}}\to e^{-x^2/2}$$

又因

$$\Gamma(p)=\sqrt{2\pi}\,p^{p-\frac{1}{2}}\frac{1}{e^{p-R(p)}}$$

其中 $R(p)\to 0(p\to\infty)$，故

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}=\left(\frac{\frac{\nu+1}{2}}{\frac{\nu}{2}}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{\nu}{2}-R\left(\frac{\nu}{2}\right)}}{e^{\frac{\nu+1}{2}-R\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}}$$

$$\to\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\to e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}\sqrt{\nu\pi}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

$$\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=\varphi(x)$$

应注意，当 $\nu=1$ 时，

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)\pi}$$

此时 t 分布即为柯西分布。

性质 4 $t(\nu)$ 的特征函数

$$\theta(t)=\frac{1}{\pi\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\frac{|t|}{2\sqrt{\nu}}\right)^{\frac{\nu}{2}}N_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{|t|}{\sqrt{\nu}}\right)$$

其中 N 为第二种贝塞尔函数。

第六节 t分布计算

在计算测量结果置信区间时，经常要计算 t 分布概率。

在计算中，常用到不完全 B 函数。不完全 B 函数 $I_x(a,b)$ 定义为

$$I_x(a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt,\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \quad (6.5)$$

设将 t 分布变量出现在 $[-t,\ t]$ 内概率记为

$$A(t)=\int_{-t}^{t}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}dt$$

则取 $x=\frac{\nu}{\nu+t^2}$，得

$$A(t)=\frac{2}{B\left(\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2}\right)}\int_0^t\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{\nu}}$$

$$=\frac{1}{B\left(\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2}\right)}\int_x^1 x^{\frac{1}{2}\nu-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=1-I_x\left(\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

若取 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{\nu}}$，则

$$A(t)=\begin{cases}2\theta/\pi, \quad 当\ \nu=1\\ \frac{2}{\pi}\left\{\theta+\sin\theta\left[\cos\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta+\cdots\right.\right.\\ \qquad \left.\left.+\frac{2\cdot4\cdots(\nu-3)}{1\cdot3\cdots(\nu-2)}\cos^{\nu-2}\theta\right]\right\},当\nu>1且为奇\\ \sin\theta\left\{1+\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cos^4\theta+\cdots\right.\\ \qquad \left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(\nu-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots(\nu-2)}\cos^{\nu-2}\theta\right\}, \quad 当\nu为偶\end{cases}$$

在近似计算时，也用如下算法。

如ν甚大时，对$t(\nu)$分布，取

$$x=t\left(1-\frac{1}{4\nu}\right)\Big/\sqrt{1+\frac{t^2}{2\nu}}$$

则

$$A(t)\approx\left(2\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt\right)-1$$

$$=2\Phi(x)-1$$

如 $\nu\leqslant5$，但 t 甚大，则

$$A(t)\approx1-2\left\{\frac{a_\nu}{t^\nu}+\frac{b_\nu}{t^{\nu+1}}\right\}$$

系数 a_ν，b_ν 如下：

ν	1	2	3	4	5
a_ν	0.3183	0.4991	1.1094	3.0941	9.948
b_ν	0.0000	0.0518	−0.0460	−2.756	−14.05

下面讨论 t 分布临界值计算。

在误差计算中，我们需查 $t(\nu)$ 分布的临界值 $t_p(\nu)$。它满足

$$P(|t|\leqslant t_p(\nu))=p$$

经计算我们列出了附表 3。

这个表是如何作出的呢？

1． 按分布函数计算。

对 $p=0.9973$（$\nu=1$，2，3），$p=0.9545$（$\nu=1$）用此法算 $t_p(\nu)$，$t_p(\nu)$ 有时也简记为 t。

（1） 当 $\nu=1$ 时 $t(\nu)$ 分布密度

$$f_1(x)=\frac{1}{(1+x^2)\pi}$$

即为柯西分布密度。此时分布函数

$$F_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\text{arc tg}t$$

如对应于正态分布临界值 3σ (对 $N(\mu,\sigma^2)$，随机变量在 $[\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma]$ 概率为 $0.997300204\approx0.9973$)，在包含同一概率情况下，t 分布临界值 t 应满足

$$F_1(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\text{arc tg}t=\frac{1+0.997300204}{2}$$

$$t=\text{tg}\,1.56655\ 5495=\text{ctg}0.00424\ 0832$$

因 0° 附近余切变化甚快，不能直接查三角函数表。此时可由下述性质计算。

性质 当 $x^2<\pi^2$ 时

$$\text{ctg}\,x=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n} \tag{6.6}$$

而

$$B_n=\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}S_{2n},\quad S_{2n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2n}}$$

当展开式右端取有限项时，其误差为舍去首项之 $\frac{\pi^2}{\pi^2-x^2}$ 倍。

证 当 $x^2<\pi^2$ 时成立

$$\text{ctg}\,x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\frac{x^7}{4725}-\cdots$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n}$$

其中

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66}$$

$$B_6=\frac{691}{2730}\quad, B_7=\frac{7}{6},\quad \cdots$$

一般

$$B_n=\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}S_{2n}$$

而

$$S_{2n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2n}}$$

如$S_2=\Sigma\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$，$S_4=\Sigma\frac{1}{m^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

注意 $S_{2n}>S_{2(n+1)}>S_{2(n+2)}>\cdots$，即 S_{2n} 随 n 单调降，则 ctg x 展式右端 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 只取 n 项时，余项

$$\delta=\frac{1}{x}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{\pi^{2k}}S_{2k}x^{2k}$$

$$<\frac{1}{x}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{\pi^{2k}}S_{2n+2}x^{2k}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}\cdot\frac{2}{\pi^{2n+2}}S_{2n+2}x^{2n+2}$$

$$<\frac{1}{x}B_{n+1}\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}x^{2n+2}\cdot\frac{\pi^2}{\pi^2-x^2}$$

得证。

将这性质用于求 $t=\mathrm{ctg}0.00424\ 0832$，则准至小数点后二位

$$t=\frac{1}{0.00424\ 0832}=235.80$$

对应于正态分布 2σ，对 t 分布

$$F_1(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{arc\,tg}t=\frac{1+0.95449\ 9736}{2}$$

$$t=13.97$$

（2） $\nu=2$ 时 $t(\nu)$ 分布密度

$$f_2(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-3/2}$$

分布函数

$$F_2(t)=\int_{-\infty}^{t}f_2(x)dx=\frac{1}{2}+\frac{t}{2\sqrt{t^2+2}}$$

对应于正态分布 3σ，对 t 分布

$$F_2(t)=\frac{1+0.99730\ 0204}{2}$$

$$t=19.21$$

（3） 当 $\nu=3$ 时 $t(\nu)$ 分布密度与分布函数

$$f_3(t)=\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^{-2}$$

$$F_3(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left\{\frac{t\sqrt{3}}{t^2+3}+\mathrm{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right\}$$

对应于正态分布 3σ，对 t 分布 $t=9.21$。

2． 按公式计算

对 $p=0.9973$（$\nu=40$ 至 100）用此法。

当分布函数之值相等，或

$$A(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-t^2/2}\,dt$$

时，正态分布取值点 x 与 t 分布 $t(\nu)$ 取值点 t 间有[8]

$$t=x+\frac{f_1}{\nu}+\frac{f_2}{\nu^2}+\frac{f_3}{\nu^3}+\frac{f_4}{\nu^4}$$

而

$$f_1=\frac{1}{4}(x^3+x)$$

$$f_2=\frac{1}{96}(5x^5+16x^3+3x)$$

$$f_3=\frac{1}{384}(3x^7+19x^5+17x^3-15x)$$

$$f_4=\frac{1}{92160}(79x^9+776x^7+1482x^5$$

$$-1920x^3-945x)$$

这样，对应于正态分布 3σ 时，$x=3$，而

$$f_1=7.5,\ f_2=17.24,\ f_3=30.1,\ f_4=34$$

当 $\nu>40$，$\frac{f_3}{\nu^3}<0.0005$，$\frac{f_4}{\nu^4}$ 更小，故为使 t 准至小数点后2位，$\frac{f_3}{\nu^3}$ 以上可忽略不计。

同样，对应于正态分布 2σ 及 σ，$\frac{f_3}{\nu^3}$ 以上项更可不计。

8. 对其余 t，可由现有表计算，如用参考文献[8]中表。当用反内插法求 t 时，用线性内插已可保证小数后2位。

第七节 F分 布

若ξ，η独立，$\nu_1\xi\sim\chi^2(\nu_1)$，$\nu_2\eta\sim\chi^2(\nu_2)$则

$$\zeta=\xi/\eta$$

称服从自由度为ν_1，ν_2的F分布$F(\nu_1,\ \nu_2)$，其密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}\dfrac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_2+\nu_1x)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}\tag{6.7}$$

性质 1 对$F(\nu_1,\ \nu_2)$分布，其

$$E=\frac{\nu_2}{\nu_2-2},\quad \nu_2>2$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}},\quad \nu_2>4$$

证 因下面积分当$\nu_2\leqslant 2$发散，当$\nu_2>2$

$$\int_0^\infty\frac{x\cdot x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_2+\nu_1x)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}dx=\frac{1}{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}+1}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}+1}}$$

$$\cdot\int_0^\infty\frac{(\nu_1x/\nu_2)^{\frac{\nu_1+2}{2}-1}}{\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{\frac{\nu_1+2}{2}+\frac{\nu_2-2}{2}}}d\frac{\nu_1}{\nu_2}x$$

$$=\frac{1}{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}+1}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}-1}}B\left(\frac{\nu_1+2}{2},\ \frac{\nu_2-2}{2}\right)$$

故

$$E=\int_0^\infty xf(x)dx=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}$$

$$\cdot\frac{1}{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}+1}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}$$

$$=\frac{\nu_2}{\nu_2-2}$$

类似可算出 $\nu_2>4$ 时 $E\zeta^2=\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\cdot\frac{\nu_1(\nu_1+2)}{(\nu_2-2)(\nu_2-4)}$，从而算出 σ 如上。

性质 2 $F(\nu_1,\nu_2)$ 的特征函数、原点矩、偏倚系数与超越系数为

$$\theta(t)=M\left(\frac{\nu_1}{2},\ -\frac{\nu_2}{2},\ -\frac{\nu_2}{\nu_1}it\right)$$

$$\alpha_r=\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^r\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}-r\right)\Big/\left\{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)\right\}$$

$$\gamma_1=\{8(\nu_2-4)(2\nu_1+\nu_2-2)^2/(\nu_1(\nu_2-6)^2(\nu_1+\nu_2-2))\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma_2=\frac{3}{\nu_2-8}\left\{\nu_2-4+\frac{1}{2}(\nu_2-6)\gamma_1^2\right\}-3$$

其中M为合流型超几何级数符号，且 α_r 存在条件为$2r<\nu_2$。

在方差分析等，常用F分布概率，其计算法如下。

若 $F(\nu_1,\nu_2)$ 分布函数记为

$$P(F,\nu_1,\nu_2)=\int_0^{F'}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}+\frac{\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}$$

$$\cdot \frac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_2+\nu_1 x)^{(\nu_1+\nu_2)/2}} dx$$

则它与不完全B函数有关系

$$Q(F;\nu_1,\nu_2)=1-P(F;\nu_1,\nu_2)=I_x\left(\frac{\nu_2}{2},\ \frac{\nu_1}{2}\right)$$

其中 $x=\dfrac{\nu_2}{\nu_2+\nu_1 F}$。

若正态分布函数

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt$$

则取

$$x=\left\{F^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{9\nu_2}\right)-\left(1-\frac{2}{9\nu_1}\right)\right\}\Big/\sqrt{\frac{2}{9\nu_1}+F^{\frac{2}{3}}\frac{2}{9\nu_2}}$$

即有 $P(F;\nu_1,\nu_2)\approx\Phi(x)$

又若记 $Q(F_p(\nu_1,\nu_2))=p$, $Q(F_{1-p}(\nu_2,\nu_1))=1-p$, 则 $F(\nu_1,\nu_2)$ 与 $F(\nu_2,\nu_1)$ 分位点间有

$$F_p(\nu_1,\nu_2)=\frac{1}{F_{1-p}(\nu_2,\nu_1)}$$

又 F, t, χ^2 分布满足

$$Q(F;\nu_1=1,\nu_2)=1-A(t;\nu_2),\quad t=\sqrt{F}$$

$$\lim_{\nu_2\to\infty}Q(F;\nu_1,\nu_2)=Q(\chi^2;\nu_1),\quad \chi^2=\nu_1 F$$

$$\lim_{\nu_1\to\infty}Q(F;\nu_1,\nu_2)=1-Q(\chi^2;\nu_2),\quad \chi^2=\frac{\nu_2}{F}$$

第七章　其它基本分布

第一节　一点分布与两点分布

一、一 点 分 布

仅在一点取值的分布称一点分布(图7.1)，即

$$P(\xi=c)=1 \qquad (7.1)$$

其期望、标准差、特征函数为

$$E=c$$

$$\sigma=0$$

$$\theta(t)=e^{itc}$$

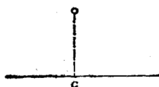


图7.1　一点分布

二、两 点 分 布

仅在c_1与c_2两点取值的分布称两点分布(图7.2)，即

$$\begin{cases} P(\xi=c_1)=P_1 \\ P(\xi=c_2)=P_2 \end{cases} \qquad (7.2)$$

而

$$E=P_1c_1+P_2c_2$$

$$\sigma=\{c_1^2(P_1-P_1^2)+c_2^2(P_2-P_2^2)-2P_1P_2c_1c_2\}^{\frac{1}{2}}$$



图7.2　两点分布

$$\theta(t)=P_1e^{itc_1}+P_2e^{itc_2}$$

在系统误差研究中，要研究$c_1=-c_2=c$且$P_1=P_2=\frac{1}{2}$情况，此时

$$E=0$$

$$\sigma=c$$

$$\theta(t)=\cos tc$$

第二节　二项分布

若我们作几次独立实验，每次实验以概率p出现事件A，则几次实验中事件A出现k次的概率服从二项分布。

比如在放射性测量中，任一粒子可能衰变也可能不衰变，则n个粒子经一段时间后衰变k个的概率服从二项分布。又如产品质量检查中，由于一批产品中有好品也有次品，若从这批产品中连续抽n件，每次都是从这批产品中任意抽取的，又设每次抽取都是独立的（当每次抽得的样品在下一次抽取前放回原批产品就能做到这一点），则n件中恰好有k件为好品的概率服从二项分布。

设每次实验中事件A出现的概率为p，则n次中k次出现A，$n-k$次不出现A的概率为$p^k(1-p)^{n-k}$，由于事件A的k次在n次中共有$\binom{n}{k}$种安排法，故由概率加法定理，n次实验中k次出现A的概率为（图7.3）

$$P(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n \qquad (7.3)$$

此时称事件A出现的次数k为服从参数为n，p的二项分布

$B(n,p)$的随机变量。

$B(n,p)$的特征函数

$$\theta(t)=\sum_{k=0}^{n} e^{itk}P(k)=\{1+p(e^{it}-1)\}^{n}$$

又二项分布

$$E=np$$

$$\mu_2=npq$$

$$\sigma=\sqrt{npq}$$

$$\mu_3=npq(q-p)$$

$$\mu_4=3n^2p^2q^2+npq(1-6pq)$$

其中$q=1-p$。

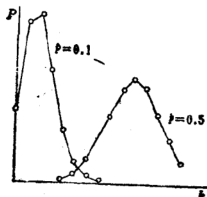


图7.3　二项分布

偏倚系数、超越系数与半不变量为

$$\gamma_1=\frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$$

$$\gamma_2=\frac{1-6pq}{npq}$$

$$\kappa_1=np,\quad \kappa_{r+1}=pq\frac{d\kappa_r}{dp}\qquad (r\geqslant 1)$$

当 $p<\frac{1}{2}$时 γ_1 为正，$p>\frac{1}{2}$时 γ_1 为负，$p=\frac{1}{2}$时γ_1为0，且系数γ_1与γ_2当 $n\to\infty$时皆趋于0。

设 ξ_1,ξ_2 服从 $B(n_1,p)$，$B(n_2,p)$互相独立的随机变量，因 $\xi_1+\xi_2$ 的特征函数

$$\theta(t)=(pe^{it}+q)^{n_1}(pe^{it}+q)^{n_2}=(pe^{it}+q)^{n_1+n_2}$$

故$\xi_1+\xi_2$服从二项分布$B(n_1+n_2,p)$，即二项分布满足加法定理。

例 1 某车间有12台车床，每台车床由于种种原因时常停车，设各台车床的开停互相独立，若每台车床在任一时刻处于停车状态的概率为$\frac{1}{3}$，问在任一时刻车间有 4 台车床处于停车状态的概率为多少？

把任一时刻对一台车床的观察看作一次实验，由于观察结果只有停车开车两种情况，且各台车床停车开车互相独立，故由二项分布知所求概率

$$P(4)=\binom{12}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(1-\frac{1}{3}\right)^{12-4}=0.2385$$

例 2 在放射性衰变中，设时刻为 0 时，放射原子的总数为 N_0，经时间 t 衰变掉一部分，因此可把 N_0 个原子分成衰变掉的与没衰变掉的两种，已知单个原子在时间 t 内衰变掉的概率为 $p=1-e^{-\lambda t}$（λ 是该放射物的衰变常数），则不衰变掉的概率为$q=1-p=e^{-\lambda t}$，于是在时间 t 内，衰变掉N个粒子的概率为

$$p(N)=\frac{N_0!}{N!(N_0-N)!}(1-e^{-\lambda t})^N(e^{-\lambda t})^{N_0-N}$$

在时间 t 内衰变掉的粒子平均数为

$$\bar{N}=E=N_0p=N_0(1-e^{-\lambda t})$$

标准差

$$\sigma=\sqrt{N_0pq}=(\bar{N}e^{-\lambda t})^{\frac{1}{2}}$$

若$\lambda t\ll1$，即测量时间远小于半衰期，则

$$\sigma\approx\sqrt{\bar{N}}$$

在$\bar{N}$较大时，由于涨落 $\bar{N}-N\ll N$，故

$$\sigma\approx\sqrt{(\bar{N}-N)+N}\approx\sqrt{N}$$

下面证明二项分布趋于正态分布。

因二项分布给出n次实验中成功x次的概率为

$$P(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}$$

当它用密度为$f(x)$的分布代表，因$f(x)dx$代表 $x—x+dx$ 的概率，令x相距1取值，故

$$f(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}$$

取标准化变量

$$t=\frac{x-np}{\sqrt{npq}}$$

记 $s=t\sqrt{npq}$，则$x=np+s$，而

$$f(x)=\frac{n!}{(np+s)!(nq-s)!}p^{np+s}q^{nq-s}$$

用斯脱灵(Stirling)渐近式

$$n!=(2\pi n)^{\frac{1}{2}}n^n e^{-n}$$

可得

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\frac{1}{\left(1+\frac{s}{np}\right)^{np+s+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{s}{nq}\right)^{nq-s+\frac{1}{2}}}$$

$$\ln(\sqrt{2\pi npq}\,f(x))=-\left(np+s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{s}{np}\right)$$

$$-\left(nq-s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{s}{nq}\right)$$

将右端对数展成级数，考虑 $t=\frac{s}{\sqrt{npq}}=\frac{x-np}{\sqrt{npq}}$为有限情况（即$x$在其期望附近），则当$n$趋于无穷而$p$不趋于0时得

$$\ln(\sqrt{2\pi npq}\,f(x)) = -\frac{s^2}{2npq}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{s^2}{npq}}$$

注意$s=x-np$，二项分布期望$E=np=a$，方差$\sigma^2=npq$，得

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

此即正态分布。故当n甚大时，可用正态分布近似二项分布。

第三节　泊松分布

若随机变量取值0,1,…的概率（图7.4）

$$P(\xi=r) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \tag{7.4}$$

其中λ为正常数，则称ξ服从泊松分布。

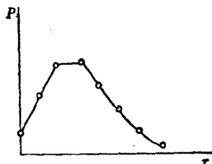


图7.4　泊松分布

性质　若ξ_n服从二项分布$B(n,p)$且$p=\frac{\lambda}{n}$（λ为正常数），则ξ_n趋于泊松分布。

证

$$P(\xi_n=r)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^r\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-r}$$

$$=\frac{\lambda^r}{r!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^r}$$

因

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^r}=1$$

故

$$\lim_{n\to\infty}P(\xi_n=r)=\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}$$

泊松分布的特征函数

$$\theta(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}=e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

于是其各阶半不变量$\kappa_s=\lambda$，而

$$E=\lambda,\qquad \sigma=\sqrt{\lambda}$$

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda}},\quad \gamma_2=\frac{1}{\lambda}$$

若ξ_1及ξ_2独立服从参数为λ_1及λ_2的泊松分布，则$\xi_1+\xi_2$的特征函数

$$e^{\lambda_1(e^{it}-1)}e^{\lambda_2(e^{it}-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$

故$\xi_1+\xi_2$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布，即对泊松分布成立加法定理。

例 卢瑟福和盖革观察了长为7.5秒的$n=2608$个时间间隔中某块放射性物质放射出的α质点数如表，其中n_i表示放出的α质点有i个这种时间间隔的个数（如表所列），它们可用泊松分布描述。

i	n_i	np_i
0	57	54.399
1	203	210.523
2	383	407.361
3	525	525.496
4	532	508.418
5	408	393.515
6	273	253.817
7	139	140.325
8	45	67.882
9	27	29.189
10	16	17.075
Σ	2608	2608.000

在该段时间内，α质点个数平均为

$$\lambda=\frac{1}{n}\Sigma n_i i=3.87$$

令

$$p_i=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$

算出np_i，可见n_i与np_i的符合是好的。

下面证明泊松分布趋于正态分布。因泊松分布

$$P(\xi=r)=\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}$$

当泊松分布用连续型随机变量的分布代表时，后者的分布密度

$$f(r)=\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}$$

将r坐标换为$x=r-\lambda$坐标，则

$$f(r)=\frac{\lambda^{x+\lambda}}{(x+\lambda)!}e^{-\lambda}$$

$$=\frac{\lambda^\lambda}{\lambda!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{(\lambda+x)(\lambda+x-1)\cdots(\lambda+1)}$$

由斯脱灵渐近式

$$n!=(2\pi n)^{\frac{1}{2}}n^n e^{-n}$$

并考虑当$x\ll\lambda$时，$\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\approx e^{-x/\lambda}$，故

$$f(r)=(2\pi\lambda)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\lambda}}$$

代回r坐标，得

$$f(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda}}e^{-\frac{(r-\lambda)^2}{2\lambda}}$$

故r服从正态分布$N(\lambda,\lambda)$。

第四节　均匀分布

随机变量ξ服从均匀分布$U[a,\ b]$，指其分布密度（图7.5）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}\qquad(7.5)$$

而其分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b\\ 1\ , & x\geqslant b\end{cases}$$

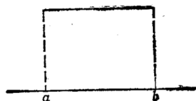


图7.5　均匀分布

性质1　对$U[a,b]$，其

$$E=\frac{b+a}{2}$$

$$\sigma=\frac{1}{2\sqrt{3}}(b-a)$$

证

$$E=\int_a^b x\frac{1}{b-a}\ dx=\frac{b+a}{2}$$

$$\sigma^2=\int_a^b (x-E)^2\frac{1}{b-a}\ dx=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

性质 2 对 $U[a,b]$，其

$$\theta(t)=\frac{1}{it(b-a)}(e^{itb}-e^{ita})$$

证

$$\theta(t)=\int_a^b e^{itx}\ \frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{e^{itx}}{it}\Big|_a^b=\frac{1}{it(b-a)}(e^{itb}-e^{ita})$$

性质 3 若 $\xi\sim U[-a,a]$，则

$$E=0$$

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}a$$

$$\theta(t)=\frac{\sin at}{at}$$

$$\kappa_{奇}=0,\qquad \kappa_{2r}=\frac{B_{2r}}{2r}(2a)^{2r}$$

其中B 为由

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\ \frac{B_j}{j!}t^j$$

定义的伯努利数，它的一些值为

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\qquad B_2=\frac{1}{6}$$

$$B_3=B_5=B_7=\cdots=0$$

$$B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42}$$

证　由性质1及性质2，知

$$E=\frac{a-a}{2}=0$$

$$\sigma=\frac{1}{2\sqrt{3}}2a=\frac{1}{\sqrt{3}}a$$

$$\theta(t)=\frac{1}{2ita}(\cos at+i\sin at-(\cos at-i\sin at))$$

$$=\frac{\sin at}{at}$$

下面去求半不变量κ，因

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j}{j!}t^j$$

代入B_0,B_1，两端除t，得

$$\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{B_j}{j!}t^{j-1}$$

因

$$\frac{d}{dt}\ln\frac{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}=\frac{1}{\left(\operatorname{sh}\frac{t}{2}\right)\Big/\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{\frac{t^2}{4}}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{t}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{t}{2}-\frac{1}{t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{t/2}+e^{-t/2}}{e^{t/2}-e^{-t/2}}-\frac{1}{t}$$

$$= \frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}$$

积分得

$$\ln \frac{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{B_j t^j}{j!j} + C$$

其中C为常数．因 $t \to 0$时，$\left(\operatorname{sh}\frac{t}{2}\right)\Big/\frac{t}{2} \to 1$，故 $C=0$，于是

$$\ln \frac{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{B_j t^j}{j!j}$$

因除B_1外，其余$B_{奇}=0$，故

$$\ln \frac{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j} t^{2j}}{(2j)!2j}$$

因

$$\theta(t) = \frac{\sin at}{at} = \frac{\operatorname{sh} iat}{iat}$$

$$\ln \theta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} \cdot \frac{1}{2j} (2iat)^{2j} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\kappa_s}{s!} (it)^s$$

故

$$\kappa_{奇}=0, \qquad \kappa_{2r} = \frac{B_{2r}}{2r}(2a)^{2r}$$

性质 4 对 $\xi \sim U[a,b]$，其

$$\kappa_1 = \frac{b+a}{2}$$

$$\kappa_3=\kappa_5=\kappa_7=\cdots=0$$

$$\kappa_{2r}=B_{2r}\frac{(b-a)^{2r}}{2r}$$

且

$$\gamma_1=0,\qquad \gamma_2=-1.2$$

证　因 ξ 可由 $\xi'\sim U\left[-\frac{b-a}{2},\ \frac{b-a}{2}\right]$ 平移得来，由前一性质及第四章第五节性质 1，可得 κ 如上。于是

$$\kappa_2=\sigma^2=\frac{1}{12}(b-a)^2,\quad \kappa_3=0,\quad \kappa_4=-\frac{1}{120}(b-a)^4$$

从而

$$\gamma_1=\frac{\kappa_3}{\sigma^3}=0$$

$$\gamma_2=\frac{\kappa_4}{\sigma^4}=-\frac{1}{120}\Big/\frac{1}{12\times12}=-1.2$$

服从此种分布的随机变量如数值计算中凑整引起的凑整误差，电子计数器末位±1量化误差及一些系统误差等。

第五节　三角分布和梯形分布

两独立同均匀分布或不同均匀分布之和分别称为三角分布或梯形分布。

性质 1　若 $\xi_1,\xi_2\sim U[-a,a]$ 独立，则 $\eta=\xi_1+\xi_2$ 所服从三角分布的密度（图7.6）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2a}{4a^2}, & -2a\leqslant x<0\\[2mm] \dfrac{2a-x}{4a^2}, & 0\leqslant x<2a\\[2mm] 0\ , & 其它\end{cases}\tag{7.6}$$

证 因$\xi_1 \sim U[-a,a]$，故其密度

$$f_1(x_1)=\frac{1}{2a},\quad |x_1|\leqslant a$$

又因$\xi_2 \sim U[-a,a]$，故其密度

$$f_2(x_2)=\frac{1}{2a},\quad |x_2|\leqslant a$$

因ξ_1,ξ_2独立，故(ξ_1,ξ_2)的联合密度

$$f(x_1,x_2)=f_1(x_1)f_2(x_2)=\frac{1}{4a^2},\quad |x_1|\leqslant a \text{且} |x_2|\leqslant a$$

随机变量$\eta=\xi_1+\xi_2$在$\eta<x$时的概率（图7.7）

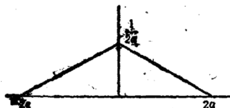


图7.6 三角分布

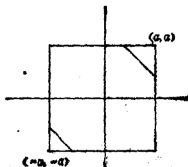


图7.7 三角分布的概率

$$F(x)=P(\xi_1+\xi_2<x)$$
$$=\iint\limits_{x_1+x_2<x} f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
$$=\frac{1}{4a^2}\iint\limits_{x_1+x_2<x} dx_1dx_2=\frac{1}{4a^2}S$$

其中S为在$[-a,a;\ -a,a]$域中满足$x_1+x_2<x$区域的面积。

1．当$x_1+x_2<2a$，$S=0$，$F(x)=0$；

2．当$-2a\leqslant x<0$，因$x_1+x_2=x$与$x_1=-a$交于$(-a,x+a)$，故$S=\frac{1}{2}(x+2a)^2$，$F(x)=\frac{1}{8a^2}(x+2a)^2$；

3. 当 $0\leqslant x<2a$, $S=4a^2-\frac{1}{2}(2a-x)^2$,

$$F(x)=\frac{1}{4a^2}\left(4a^2-\frac{1}{2}(2a-x)^2\right)=1-\frac{1}{8a^2}(2a-x)^2,$$

4. 当 $x\geqslant 2a$, $S=4a^2$, $F(x)=1$。

将上述 $F(x)$ 微分得证。

性质 2 对三角分布

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2a \\ \frac{1}{8a^2}(x+2a)^2, & -2a\leqslant x<0 \\ 1-\frac{1}{8a^2}(2a-x)^2, & 0\leqslant x<2a \\ 1, & x\geqslant 2a \end{cases}$$

$$E=0$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

证 $F(x)$ 可由上面证明中得知。因三角分布对称于原点，故 $E=0$，又 σ 可由均匀分布算出。

性质 3 若 $\xi_1\sim U[-a,a]$，$\xi_2\sim U[-b,b]$ 独立且 $b\geqslant a$，则 $\eta=\xi_1+\xi_2$ 所服从梯形分布的密度（图 7.8）$f(x)$ 及期望 E 与标准差 σ 为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{b+a+x}{4ab}, & -b-a\leqslant x<-b+a \\ \frac{1}{2b}, & -b+a\leqslant x<b-a \\ \frac{b+a-x}{4ab}, & b-a\leqslant x<b+a \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{7.7}$$

$$E=0,\quad \sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+b^2}$$

此性质证法同上。

两凑整数的和或差等服从三角分布、梯形分布。

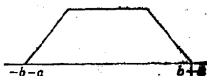


图7.8 梯形分布

第六节 反正弦分布

随机变量ξ服从反正弦分布$As[-m,m]$，指其分布密度（图7.9）

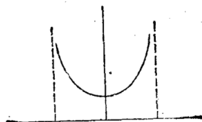


图7.9 反正弦分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{m^2-x^2}}, & |x|\leqslant m\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{7.8}$$

由积分，我们知道，$As[-m,m]$的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -m\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{m}, & -m\leqslant x<m\\ 1, & x\geqslant m\end{cases}$$

由第三章第三节例 2，我们知道，若$\xi\sim U[0,2\pi]$，则$m\sin(\xi+\xi_0)\sim As[-m,m]$，而其中$\xi_0$为常数。

性质 对$\xi\sim As[-m,m]$，其

$$E=0$$

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}m$$

$$\theta(t)=J_0(tm)$$

$$\mu_{2r}=\frac{(2r)!}{(r!)^2 2^{2r}}m^{2r},\ \mu_{2r+1}=0$$

其中J_0为0阶贝塞尔函数。

证　因分布对原点对称，故$E=0$。又

$$\sigma^2=\int_{-m}^{m}\frac{x^2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{-x\sqrt{m^2-x^2}\Big|_{-m}^{m}+\int_{-m}^{m}\sqrt{m^2-x^2}\,dx\right\}$$

取　$x=m\sin y$，则

$$\int\sqrt{m^2-x^2}dx=m^2\int\cos^2 y dy=m^2\int\frac{1+\cos 2y}{2}dy$$

$$=\frac{m^2}{2}\arcsin\frac{x}{m}+\frac{x}{2}\sqrt{m^2-x^2}+C$$

故

$$\sigma^2=\frac{1}{\pi}\left\{0+\frac{m^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\left(0+\frac{m^2}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right\}=\frac{m^2}{2}$$

又

$$\theta(t)=\int_{-m}^{m}e^{itx}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2-x^2}}dx$$

令 $y=\frac{x}{m}$，则

$$\theta(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}e^{itmy}dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cos tmy\ dy$$

令 $\varphi=-\arcsin y$，则 $y=-\sin\varphi$，$d\varphi=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$，且当 $y=1$ 时 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$，当 $y=-1$ 时 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，故

$$\theta(t)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos(-tm\sin\varphi)(-d\varphi)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(-tm\sin\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi/2}+\int_{-\pi/2}^{0}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(-tm\sin\varphi)d\varphi$$

因0阶贝塞尔函数

$$J_0(v)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(-v\sin\varphi)d\varphi$$

故

$$\theta(t)=J_0(tm)$$

因

$$J_0(tm)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(tm)^{2\nu}}{(\nu!)^2 2^{2\nu}}$$

故

$$\mu_{2r}=\frac{(2r)!}{(r!)^2 2^{2r}}m^{2r}$$

$$\mu_{2r+1}=0$$

由此性质知

$$\mu_2=\frac{m^2}{2},\ \mu_4=\frac{3}{8}m^4,\ \mu_6=\frac{5}{16}m^6,\ \mu_8=\frac{35}{128}m^8$$

从而

$$\gamma_1=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=0$$

$$\gamma_2=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}-3=-1.5$$

度盘偏心引起的测角误差等服从反正弦分布。

第七节 切尾正态绝对正态与对数正态分布

一、切尾正态分布

在实际工作中，常将服从正态分布之偶然误差$N(0,\sigma_H^2)$中绝对值大于x_0（如$3\sigma_H$）者剔除，而余下误差所服从之分布为切尾正态分布。可算出其分布密度（图7.10）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma_H}\varphi(t), & |x|\leqslant x_0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{7.9}$$

而分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-x_0\\ A\{\Phi_0(t)-\Phi_0(t_0)\}, & -x_0\leqslant x<x_0\\ 1, & x\geqslant x_0\end{cases}$$

其中

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\quad \Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$$

$$A=\frac{1}{2\Phi_0(t_0)}$$

$$t=\frac{x}{\sigma_H},\qquad t_0=\frac{x_0}{\sigma_H}$$

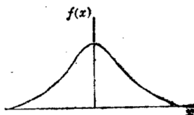


图7.10 切尾正态分布

性质 对切尾正态分布，其

$$E=0$$

$$\sigma=\sigma_H\sqrt{1-t_0\frac{\varphi(t_0)}{\Phi_0(t_0)}}$$

证 因分布对原点对称，故 $E=0$。现求 σ，先看 $\eta\sim N(0,1)$于t_0切尾情况，此时由式(7.9)可见

$$f(x)=A\varphi(t),\quad |x|\leqslant t_0$$

其中 $A=\frac{1}{2\Phi_0(t_0)}$，因

$$\sigma^2=\int_{-t_0}^{t_0}x^2A\varphi(x)dx=A\left(1-2\int_{t_0}^{\infty}x^2\varphi(x)dx\right)$$

$$=A\left\{1-2\left(\frac{-xe^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\Big|_{t_0}^{\infty}+\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\right)\right\}$$

$$=A\left\{1-2\left(t_0\varphi(t_0)+\frac{1}{2}-\Phi_0(t_0)\right)\right\}$$

$$=1-t_0\frac{\varphi(t_0)}{\Phi_0(t_0)}$$

知性质成立。

当 $\xi\sim N(0,\sigma_H^2)$于$x_0=t_0\sigma_H$切尾时，作 $\eta=\xi/\sigma_H$，因 $\eta\sim N(0,1)$，其σ如上，故对ξ，其

$$\sigma=\sigma_H\sqrt{1-t_0\frac{\varphi(t_0)}{\Phi_0(t_0)}}$$

二、绝对正态分布

若$\xi \sim N(0,\sigma_H)$，则$\delta = |\xi|$称服从绝对正态分布（或反射正态分布），仍用切尾正态分布中$\varphi(x)$与$\Phi_0(x)$记号，则绝对正态分布的分布密度（图7.11）与分布函数为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{\sigma_H}\varphi\left(\dfrac{x}{\sigma_H}\right), & x\geqslant 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{7.10}$$

$$F(x)=\begin{cases} 2\Phi_0\left(\dfrac{x}{\sigma_H}\right), & x\geqslant 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

容易算出，绝对正态分布的

$$E=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_H$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}}\sigma_H$$

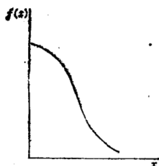
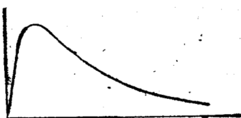


图7.11　绝对正态分布


图7.12　对数正态分布

三、对数正态分布

若$\ln\xi \sim N(\mu,\sigma_H)$，则称$\xi$服从对数正态分布。其分布密度（图7.12）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma_H x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x-\mu)^2}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \quad (7.11)$$

分布函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma_H\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

其期望与标准差

$$E=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma_H^2}$$

$$\sigma=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma_H^2}(e^{\sigma^2}-1)^{\frac{1}{2}}$$

对数正态分布常用于卫生系统。

第八节　欧拉分布与马克斯威尔分布

若 $\xi_i \sim N(0,\sigma_0)$独立，则称

$$\eta=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$$

服从欧拉分布，亦称瑞利分布，同时称

$$\zeta=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$$

服从马克斯威尔分布。

如子弹离中心距离服从欧拉分布，分子运动速度服从马克斯威尔分布。

现求分布密度。因 ξ_1^2 密度为

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2\sigma_0^2}}+\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2\sigma_0^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2\sigma_0^2}},\quad x>0$$

ξ_1 与 ξ_2 联合密度为

$$\frac{1}{\sigma_0^2\, 2\pi\sqrt{x_1x_2}}e^{-\frac{x_1+x_2}{2\sigma_0^2}},\quad x_1>0 \text{ 且 } x_2>0$$

$\xi_1^2+\xi_2^2$ 密度（图 7.13）

$$f(x)=\int_0^x f(v,x-v)dv$$

$$=\int_0^x \frac{1}{\sigma_0^2 2\pi\sqrt{v(x-v)}}e^{-\frac{v+x-v}{2\sigma_0^2}}dv$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}e^{-\frac{x}{2\sigma_0^2}}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{v(x-v)}}dv$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}e^{-\frac{x}{2\sigma_0^2}}B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sigma_0^2}e^{-\frac{x}{2\sigma_0^2}},\quad x>0$$

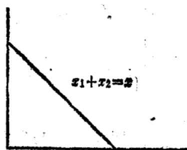


图7.13 欧拉分布导出

又 $\xi_1^2+\xi_2^2$ 与 ξ_3^2 联合密度为

$$\frac{1}{2\sigma_0^3\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{x}{2\sigma_0^2}}e^{-\frac{y}{2\sigma_0^2}},\quad x>0$$

且 $y>0$

$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$ 密度

$$\int_0^x \frac{1}{2\sigma_0^3\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(v+x-v)}$$

$$\cdot dv=\frac{\sqrt{x}}{\sigma_0^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2\sigma_0^2}},\quad x>0$$

因当 $\eta=\sqrt{\xi}$ 时，η 密度 f_1 与 ξ 密度 f 间满足 $f_1(y)=2yf(y^2)$，故 $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ 密度为

$$f(y)=\frac{y}{\sigma_0^2}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}},\quad y>0$$

而$\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$密度为

$$f(y)=\frac{y^2}{\sigma_0^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}},\quad y>0$$

于是，得欧拉分布密度（图 7.14）与函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma_0^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \tag{7.12}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

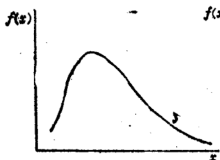


图7.14 欧拉分布

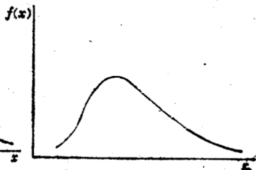


图7.15 马克斯威尔分布

而马克斯威尔的分布密度（图 7.15）与函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sigma_0^3}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \tag{7.13}$$

$$F(x)=\begin{cases}2\left\{\Phi_0\left(\dfrac{x}{\sigma_0}\right)-\dfrac{x}{\sigma_0}\varphi\left(\dfrac{x}{\sigma_0}\right)\right\}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}},\quad \Phi_0(t)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt$$

性质 1　对欧拉分布

$$E=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_0$$

$$\sigma=\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}\sigma_0$$

证

$$E=\int_0^\infty \frac{x^2}{\sigma_0^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_0}\int_0^\infty \frac{x^2}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}$$

$$\times e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_0$$

$$E\xi^2=\int_0^\infty \frac{x^3}{\sigma_0^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{\frac{1}{2}}\sigma_0^3=2\sigma_0^2$$

$$\sigma^2=E\xi^2-E^2=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma_0^2$$

性质 2　对马克斯威尔分布

$$E=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_0$$

$$\sigma=\sqrt{3-\frac{8}{\pi}}\sigma_0$$

证因

$$E=\int_0^\infty x\cdot\frac{x^2}{\sigma_0^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}dx$$

但

$$\int_0^\infty x^3e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}dx=\int_0^\infty -\sigma_0^2x^2de^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$=-\sigma_0^2x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}(-2\sigma_0^2x)dx$$

$$=0-2\sigma_0^4\int_0^{\infty} de^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$=2\sigma_0^4$$

故

$$E=\frac{1}{\sigma_0^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot 2\sigma_0^4=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_0$$

又

$$E\xi^2=\int_0^{\infty} x^2\frac{x^2}{\sigma_0^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sigma_0^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}dx$$

因

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}dx=3\sigma_0^5\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

故

$$E\xi^2=3\sigma_0^2$$

$$\sigma^2=\left(3-\frac{8}{\pi}\right)\sigma_0^2$$

第九节 均匀分布合成

在误差分析中，有时会遇到几个均匀分布，这时要求它们的和所形成的分布，这就是均匀分布合成的问题。由均匀分布的合成，我们可以知道和分布的分布密度、分布函数，并可找出其极限误差与标准差之比即置信因子等。

一、同均匀分布合成

若 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 为独立同分布的 $U[0,1]$随机变量，此一事实亦记为 $\xi_i \underset{\sim}{iid} U[0,1]$，而 iid 代表独立同分布，后

同。今求

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i \tag{7.14}$$

的分布[10][11]。

首先我们来求 $\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 的分布密度 $f_n(x)$。

因 ξ_i 在$[0,1]$上取值，故 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 仅能在$[0,n]$取值，于是 $f_n(x)$在$[0,n]$外为0，因

$$\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i+\xi_{n+1}$$

于是由式(3.23)知

$$f_{n+1}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)f_1(x-t)dt \tag{7.15}$$

因 $x-t\in[0,1]$，故 $t\in[x-1,x]$，从而

$$f_{n+1}(x)=\int_{x-1}^{x}f_n(t)dt \tag{7.16}$$

下面依次求$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$，并用归纳法证明 $f_n(x)$ 的一般形式。

1. 求 $f_2(x)$

此时 $n=1$，而

$$f_1(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,1]\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当 $x\in[0,1]$，因 $x-1\leqslant0$，故求 $f_2(x)$ 右端积分下限应取0，此时 $f_2(x)$之第一段

$$f_{21}(x)=\int_0^x 1\,dt=x$$

当 $x\in[1,2]$，因 $x\geqslant 1$，故求 $f_2(x)$ 右端积分上限应取 1，此时 $f_2(x)$ 之第二段

$$f_{22}(x)=\int_{x-1}^{1} 1\,dt=t\Big|_{t=x-1}^{1}=1-(x-1)=2-x$$

于是

$$f_2(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ 2-x, & x\in[1,2] \end{cases}$$

这就是本章第五节三角分布的密度。

为便与 $f_n(x)$ 比较，我们可将上式写为

$$f_2(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ x-2(x-1), & x\in[1,2] \end{cases}$$

2. 求 $f_3(x)$

当 $x\in[0,1]$ 时

$$f_{31}(x)=\int_0^x f_2(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=\frac{x^2}{2}$$

当 $x\in[1,2]$ 时，因 $f_2(t)$ 在 $[0,1]$，$[1,2]$ 段形式不一，但 $[1,2]$ 上的值 $t-2(t-1)$ 为 $[0,1]$ 上的值 t 与 $-2(t-1)$ 之和，故

$$\begin{aligned} f_{32}(x)&=\int_{x-1}^{1} t\,dt+\int_1^x (t-2(t-1))dt \\ &=\int_{x-1}^{x} t\,dt-\int_1^x 2(t-1)dt \\ &=\int_0^x t\,dt-\int_0^{x-1} t\,dt-\int_1^x 2(t-1)dt \end{aligned}$$

对右端第三项积分作代换 $t-1=v$，并注意定积分与积分变量记法无关，故

$$f_{32}(x)=\int_0^x t\,dt-\int_0^{x-1} t\,dt-\int_0^{x-1} 2v\,dv$$

$$=\int_0^x t\,dt-\int_0^{x-1} 3v\,dv$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}(x-1)^2$$

当 $x\in[2,3]$时

$$f_{33}(x)=\int_{x-1}^{2}(t-2(t-1))\,dt$$

$$=\int_{x-1}^{x} t\,dt+\int_x^2 t\,dt-\int_1^x 2(t-1)\,dt$$

$$-\int_{x-1}^{1} 2(t-1)\,dt-\int_x^2 2(t-1)\,dt$$

$$=f_{32}(x)+\int_x^2 t\,dt-\int_{x-1}^{1} 2(t-1)\,dt$$

$$-\int_x^2 2(t-1)\,dt$$

$$=f_{32}(x)-\int_{x-1}^{1} 2(t-1)\,dt$$

$$+\int_x^2 (2-t)\,dt$$

令第二项积分中 $t-1=u$，第三项积分中 $t-2=v$，则

$$f_{33}(x)=f_{32}(x)+\int_0^{x-2} 2u\,du+\int_0^{x-2} v\,dv$$

$$=f_{32}(x)+\int_0^{x-2} 3v\,dv$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}(x-2)^2$$

$$=\frac{1}{2}(x-3)^2$$

故得

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & x\in[0,1]\\[2mm] \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}(x-1)^2, & x\in[1,2]\\[2mm] \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}(x-1)^2+\dfrac{3}{2}(x-2)^2, & x\in[2,3]\end{cases}$$

3. 求 $f_4(x)$

当 $x\in[0,1]$时

$$f_{41}(x)=\int_0^x \frac{1}{2}t^2\,dt=\frac{1}{3!}x^3$$

当 $x\in[1,2]$时

$$f_{42}(x)=\int_{x-1}^{x}\frac{1}{2}t^2\,dt-\int_1^x\frac{3}{2}(t-1)^2dt$$

$$=\int_0^x\frac{1}{2}t^2\,dt-\int_0^{x-1}\frac{1}{2}t^2\,dt-\int_1^x\frac{3}{2}(t-1)^2dt$$

对右端第三项积分作代换 $t-1=v$, 则

$$f_{42}(x)=\int_0^x\frac{1}{2}t^2\,dt-\int_0^{x-1}\frac{1}{2}t^2\,dt-\int_0^{x-1}\frac{3}{2}v^2dv$$

$$=\int_0^x\frac{1}{2}t^2\,dt-\int_0^{x-1}2v^2dv$$

$$=\frac{1}{3!}\left\{x^3-\binom{4}{1}(x-1)^3\right\}$$

当 $x\in[2,3]$时

$$f_{43}(x)=\int_{x-1}^{x}\frac{1}{2}\{t^2-3(t-1)^2\}dt+\int_2^x\frac{3}{2}(t-2)^2dt$$

$$=\int_{x-1}^{x}\frac{t^2}{2}dt-\int_1^x\frac{3}{2}(t-1)^2dt-\int_{x-1}^{1}\frac{3}{2}(t-1)^2dt$$

$$+\int_2^x \frac{3}{2}(t-2)^2dt = f_{42}(x) - \int_{x-1}^1 \frac{3}{2}(t-1)^2dt$$

$$+\int_2^x \frac{3}{2}(t-2)^2dt$$

令右端第二项积分 $t-1=u$，第三项积分 $t-2=v$，则

$$f_{43}(x) = f_{42}(x) + \int_0^{x-2} \frac{3}{2}u^2du + \int_0^{x-2} \frac{3}{2}v^2dv$$

$$= f_{42}(x) + \int_0^{x-2} 3v^2dv$$

$$= \frac{1}{3!}\left\{x^3 - \binom{4}{1}(x-1)^3 + \binom{4}{2}(x-2)^3\right\}$$

当 $x\in[3,4]$ 时

$$f_{44}(x) = \int_{x-1}^3 \frac{1}{2}\{t^2 - 3(t-1)^2 + 3(t-2)^2\}dt$$

即

$$f_{44}(x) = \int_{x-1}^x \frac{1}{2}\{t^2 - 3(t-1)^2\}dt$$

$$+\int_x^3 \frac{1}{2}\{t^2 - 3(t-1)^2\}dt + \int_2^x \frac{3}{2}(t-2)^2dt$$

$$+\int_{x-1}^2 \frac{3}{2}(t-2)^2dt + \int_x^3 \frac{3}{2}(t-2)^2dt$$

$$= f_{43}(x) + \int_x^3 \frac{1}{2}\{t^2 - 3(t-1)^2 + 3(t-2)^2\}dt$$

$$+\int_{x-1}^2 \frac{3}{2}(t-2)^2dt$$

因

$$\frac{1}{2}\{t^2 - 3(t-1)^2 + 3(t-2)^2\} = \frac{1}{2}(t-3)^2$$

又在下面第一式右端第二项积分中令$t-2=u$，第三项积分中令$t-3=v$，则

$$f_{44}(x)=f_{43}(x)+\int_{x-1}^{2}\frac{3}{2}(t-2)^2dt+\int_{x}^{3}\frac{1}{2}(t-3)^2dt$$

$$=f_{43}(x)-\int_{0}^{x-3}\frac{3}{2}u^2du-\int_{0}^{x-3}\frac{1}{2}v^2dv$$

$$=f_{43}(x)-\int_{0}^{x-3}2v^2dv$$

$$=\frac{1}{3!}\left\{x^3-\binom{4}{1}(x-1)^3+\binom{4}{2}(x-2)^3-\binom{4}{3}(x-3)^3\right\}$$

于是

$$f_4(x)=\begin{cases}\frac{1}{3!}x^3, & x\in[0,1]\\ \frac{1}{3!}\left\{x^3-\binom{4}{1}(x-1)^3\right\} & x\in[1,2]\\ \frac{1}{3!}\left\{x^3-\binom{4}{1}(x-1)^3+\binom{4}{2}(x-2)^3\right\} & x\in[2,3]\\ \frac{1}{3!}\left\{x^3-\binom{4}{1}(x-1)^3+\binom{4}{2}(x-2)^3-\binom{4}{3}(x-3)^3\right\}, & x\in[3,4]\end{cases}$$

上述$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$图形如图7.16。

应注意，对$y=\frac{n}{2}$轴而言，$f_n(x)$图形对称，于是

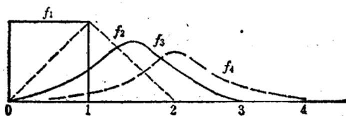


图7.16　同均匀分布和的密度

$$f_{nn}(x)=f_{n1}(-x+n)$$

从 $f_1(x)$ 至 $f_4(x)$ 的推导结果中，可见

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}, & x\in[0,1]\\ \dfrac{1}{(n-1)!}\left\{x^{n-1}-\binom{n}{1}(x-1)^{n-1}\right\}, & x\in[1,2]\\ \dfrac{1}{(n-1)!}\left\{x^{n-1}-\binom{n}{1}(x-1)^{n-1}\right. & \\ \qquad\left.+\binom{n}{2}(x-2)^{n-1}\right\}, & x\in[2,3]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{1}{(n-1)!}\left\{x^{n-1}-\binom{n}{1}(x-1)^{n-1}\right. & \\ \quad+\binom{n}{2}(x-2)^{n-1}+\cdots+(-1)^i\times & \\ \times\binom{n}{i}(x-i)^{n-1}+\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}\times & \\ \left.\times(x-k)^{n-1}\right\}, & x\in[k,k+1]\\ \cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{1}{(n-1)!}\left\{x^{n-1}-\binom{n}{1}(x-1)^{n-1}\right. & \end{cases}$$

$$
\left|\begin{array}{l}
+\binom{n}{2}(x-2)^{n-1}+\cdots+(-1)^{i}\times \\
\times\binom{n}{i}(x-i)^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\times \\
\times\binom{n}{n-1}(x-\overline{n-1})^{n-1}, \qquad x\in[n-1,n]
\end{array}\right.
$$

(7.17)

当 $x\in[n-1,n]$，由 $f_n(x)$之第一段 $f_{n1}(-x+n)$亦可得出 $f_n(x)$之第 n 段为

$$f_{nn}(x)=\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(x-n)^{n-1}$$

今将式(7.17)用归纳法证明之。即设 $f_n(x)$成立，由

$$\int_{x-1}^{x} f_n(t)dt=f_{n+1}(x)$$

导出 $f_{n+1}(x)$。过程如下：

当 $x\in[0,1]$时

$$f_{n+1,1}(x)=\int_0^x \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}dt=\frac{1}{n!}x^n$$

当 $x\in[1,2]$时

$$
\begin{aligned}
f_{n+1,2}(x)=&\int_{x-1}^{x} \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\,dt \\
&+\int_1^x\frac{-1}{(n-1)!}\binom{n}{1}(t-1)^{n-1}dt \\
=&f_{n+1,1}(x)-\int_0^{x-1}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}dt \\
&-\int_1^x\frac{1}{(n-1)!}\binom{n}{1}(t-1)^{n-1}dt
\end{aligned}
$$

令右端第三项积分中 $t-1=v$，则

$$f_{n+1,2}(x)=f_{n+1,1}(x)-\int_0^{x-1}\frac{1}{(x-1)!}t^{n-1}dt$$

$$-\int_0^{x-1}\frac{1}{(n-1)!}\binom{n}{1}v^{n-1}dv$$

因 $1+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1}$，故

$$f_{n+1,2}(x)=f_{n+1,1}(x)-\int_0^{x-1}\frac{1}{(n-1)!}\binom{n+1}{1}v^{n-1}dv$$

$$=f_{n+1,1}(x)-\frac{1}{n!}\binom{n+1}{1}(x-1)^n$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{x^n-\binom{n+1}{1}(x-1)^n\right\}$$

当 $x\in[2,3]$时

$$f_{n+1,3}(x)=\int_{x-1}^{x}\frac{1}{(n-1)!}\left\{t^{n-1}-\binom{n}{1}(t-1)^{n-1}\right\}dt$$

$$+\int_2^x\frac{1}{(n-1)!}\binom{n}{2}(t-2)^{n-1}dt$$

即

$$f_{n+1,3}(x)=\int_{x-1}^{x}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}dt$$

$$+\int_1^x\frac{-1}{(n-1)!}\binom{n}{1}(t-1)^{n-1}dt$$

$$+\int_{x-1}^{1}\frac{-1}{(n-1)!}\binom{n}{1}(t-1)^{n-1}dt$$

$$+\int_2^x\frac{1}{(n-1)!}\binom{n}{2}(t-2)^{n-1}dt$$

$$
= f_{n+1,2}(x) + \int_{x-1}^{1} \frac{-1}{(n-1)!}\binom{n}{1}(t-1)^{n-1}\,dt
$$

$$
+ \int_{2}^{x} \frac{1}{(n-1)!}\binom{n}{2}(t-2)^{n-1}dt
$$

令右端第二项积分中 $t-1=u$，第三项积分中 $t-2=v$，注意 $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}$，则

$$
f_{n+1,3}(x) = f_{n+1,2}(x) + \int_{0}^{x-2} \frac{1}{(n-1)!}\binom{n}{1}u^{n-1}du
$$

$$
+ \int_{0}^{x-2} \frac{1}{(n-1)!}\binom{n}{2}v^{n-1}dv
$$

$$
= f_{n+1,2}(x) + \int_{0}^{x-2} \frac{1}{(n-1)!}\binom{n+1}{2}v^{n-1}dv
$$

$$
= \frac{1}{n!}\left\{x^n - \binom{n+1}{1}(x-1)^n + \binom{n+1}{2}(x-2)^n\right\}
$$

由上可见，当 $x\in[k-1,k]$ 时

$$
f_{n+1,k}(x) = \int_{x-1}^{x} \frac{1}{(n-1)!}\left\{ t^{n-1} - \binom{n}{1}(t-1)^{n-1}\right.
$$

$$
\left. + \cdots + (-1)^{k-2}\binom{n}{k-2}(t-\overline{k-2})^{n-1}\right\}dt
$$

$$
+ \int_{k-1}^{x} \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}(t-\overline{k-1})^{n-1}dt
$$

$$
= \frac{1}{n!}\left\{x^n - \binom{n+1}{1}(x-1)^n + \cdots + (-1)^i\right.
$$

$$
\left.\cdot\binom{n+1}{i}(x-i)^n + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{n+1}{k-1}(x-\overline{k-1})^n\right\}
$$

现求当$x\in[k,k+1]$时$f_{n+1,k+1}(x)$之表达式，则

$$f_{n+1,k+1}(x)=\int_{x-1}^{x}\frac{1}{(n-1)!}\left\{t^{n-1}-\binom{n}{1}(t-1)^{n-1}\right.$$

$$+\cdots+(-1)^{k-2}\binom{n}{k-2}(t-\overline{k-2})^{n-1}$$

$$\left.+(-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}(t-\overline{k-1})^{n-1}\right\}dt$$

$$+\int_{k}^{x}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{k}\binom{n}{k}(t-k)^{n-1}dt$$

即

$$f_{n+1,k+1}(x)=f_{n+1,k}(x)+\int_{x-1}^{k-1}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{k-1}$$

$$\cdot\binom{n}{k-1}(t-\overline{k-1})^{n-1}dt$$

$$+\int_{k}^{x}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{k}\binom{n}{k}(t-k)^{n-1}dt$$

令上式右端第二项积分中$t-\overline{k-1}=u$，第三项积分中$t-k=v$，并注意$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$，则

$$f_{n+1,k+1}(x)=f_{n+1,k}(x)+\int_{0}^{x-k}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{k}$$

$$\cdot\binom{n}{k-1}u^{n-1}du+\int_{0}^{x-k}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{k}\binom{n}{k}v^{n-1}dv$$

$$=f_{n+1,k}(x)+\int_{0}^{x-k}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{k}\binom{n+1}{k}v^{n-1}dv$$

$$=\frac{1}{n!}\Big\{x^n-\binom{n+1}{1}(x-1)^n+\binom{n+1}{2}(x-2)^n$$

$$+\cdots+(-1)^i\binom{n+1}{i}(x-i)^n+\cdots$$

$$+(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k-1}(x-\overline{k-1})^n+(-1)^k\binom{n+1}{k}(x-k)^n\Big\}$$

于是，当 $x\in[n-1,n]$时

$$f_{n+1,n}(x)=\int_{x-1}^{x}\frac{1}{(n-1)!}\Big\{t^{n-1}-\binom{n}{1}(t-1)^{n-1}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}(t-\overline{n-2})^{n-1}\Big\}dt$$

$$+\int_{n-1}^{x}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(t-\overline{n-1})^{n-1}dt$$

$$=\frac{1}{n!}\Big\{x^n-\binom{n+1}{1}(x-1)^n+\cdots$$

$$+(-1)^i\binom{n+1}{i}(x-i)^n+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\binom{n+1}{n-1}(x-\overline{n-1})^n\Big\}$$

故对 $x\in[n,n+1]$时

$$f_{n+1,n+1}(x)=\int_{x-1}^{n}\frac{1}{(n-1)!}\Big\{t^{n-1}-\binom{n}{1}(t-1)^{n-1}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}(t-\overline{n-2})^{n-1}$$

$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(t-\overline{n-1})^{n-1}\Big\}dt$$

因

$$\int_{x-1}^{n}+\int_{x}^{n-1}=\int_{x}^{n}+\int_{x-1}^{n-1}$$

故

$$f_{n+1,n+1}(x)=f_{n+1,n}(x)+\int_{x-1}^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}$$

$$\cdot\binom{n}{n-1}(t-\overline{n-1})^{n-1}dt$$

$$+\int_{x}^{n}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(t-\overline{n-1})^{n-1}dt$$

$$+\int_{x}^{n}\frac{1}{(n-1)!}\Big\{t^{n-1}-\binom{n}{1}(t-1)^{n-1}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}(t-\overline{n-2})^{n-1}\Big\}dt$$

$$=f_{n+1,n}(x)+\int_{x-1}^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}$$

$$\cdot\binom{n}{n-1}(t-\overline{n-1})^{n-1}dt$$

$$+\int_{x}^{n}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(t-n)^{n-1}dt$$

令右端第二项积分中 $t-\overline{n-1}=u$，第三项积分中 $t-n=v$，注意$\binom{n}{n-1}+1=\binom{n+1}{n}$，则

$$f_{n+1,n+1}(x)=f_{n+1,n}(x)-\int_0^{x-n}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}$$

$$\cdot\binom{n}{n-1}u^{n-1}du-\int_0^{x-n}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}v^{n-1}dv$$

$$=f_{n+1,n}(x)+\int_0^{x-n}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^n\binom{n+1}{n}v^{n-1}dv$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{x^n-\binom{n+1}{1}(x-1)^n+\binom{n+1}{2}(x-2)^n+\cdots\right.$$

$$+(-1)^i\binom{n+1}{i}(x-i)^n+\cdots+(-1)^{n-1}$$

$$\left.\cdot\binom{n+1}{n-1}(x-\overline{n-1})^n+(-1)^n\binom{n+1}{n}(x-n)^n\right\}$$

从而用归纳法证明了式(7.17)$f_n(x)$的形式。

$f_n(x)$的一般形式亦可表为

$$f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{[x]}(-1)^r\binom{n}{r}(x-r)^{n-1} \qquad (7.18)$$

其中$[x]$表x的整数部分。

∵ $f_n(x)$在$[k,k+1]$, $k=0,1,\cdots,n-1$上有不同的解析式。

$f_n(x)$是一个样条函数;

$f_1(x)$是一个不连续的函数; $f_2(x)$连续但有一个不连续的导数; $f_3(x)$有一个连续的导数但有一个不连续的二阶导数; …。

将$f_n(x)$积分，可得ξ_i iid $U[0,1]$时

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

的分布函数

$$F_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{[x]}(-1)^r\binom{n}{r}(x-r)^n \tag{7.19}$$

若 ζ_i iid $U\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$，则由

$$\zeta_i=\xi_i-\frac{1}{2} \tag{7.20}$$

而 ξ_i iid $U[0,1]$，可知

$$\zeta=\sum_{i=1}^{n}\zeta_i=\xi-\frac{n}{2}$$

于是由 ξ 的分布密度式(7.18)与分布函数式(7.19)可得 ζ 的分布密度与分布函数

$$f_n(x)=f_{\xi,n}\left(x+\frac{n}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{\left[x+\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\binom{n}{r}\left(x+\frac{n}{2}-r\right)^{n-1} \tag{7.21}$$

$$F_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{\left[x+\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\binom{n}{r}\left(x+\frac{n}{2}-r\right)^n \tag{7.22}$$

若 η_i iid $U[-1,1]$，则由

$$\eta_i=2\xi_i-1 \tag{7.23}$$

而 ξ_i iid $U[0,1]$，可知

$$\eta=\sum_{i=1}^{n}\eta_i=2\xi-n$$

于是由 ξ 的分布密度式(7.18)与分布函数式(7.19)可得 η 的分布密度与分布函数

$$f_n(x)=\frac{1}{2}f_{\xi,n}\left(\frac{x+n}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2^n(n-1)!}\sum_{r=0}^{\left[\frac{x+n}{2}\right]}(-1)^r\binom{n}{r}(x+n-2r)^{n-1}$$

(7.24)

$$F_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\sum_{r=0}^{\left[\frac{x+n}{2}\right]}(-1)^r\binom{n}{r}(x+n-2r)^n$$

(7.25)

当 $\zeta_i \underset{\sim}{iid}\ U\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$。对 $\zeta=\sum_{i=1}^{n}\zeta_i$,因其期望为0,标准差为 $\sigma=\sqrt{\frac{n}{12}}$,故可算出 ζ 的标准化变量 $\zeta/\sqrt{\frac{n}{12}}$ 的分布函数 $F(x)$,我们常需 $Q(x)=1-F(x)$,其值见附表5。

若 δ 为偶然误差(其期望为0),则其极限误差Δ指

$$P(|\delta|<\Delta)=p \tag{7.26}$$

p 可取0.95,0.9973等值。

称

$$\frac{\Delta}{\sigma}=k \tag{7.27}$$

为误差 δ 的置信因子。

对 n 个独立同均匀分布 $\delta_i \sim U\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 的偶然误差之和 $\sum_{i=1}^{n}\delta_i$，当

$n=1(1)10,12,\infty$

$p=0.6827,0.95,0.9545,0.99,0.9973$

的置信因子如附表 6。

对应于 n 个独立同均匀分布 $\delta_i \sim U[-a,a]$ 的偶然误差（a 任意）之和 $\sum_{i=1}^{n}\delta_i$，其置信因子亦为该表。

二、不同均匀分布合成

设 $\zeta_1 \sim U[-a_1,a_1]$，$\zeta_2 \sim U[-a_2,a_2]$，…，$\zeta_n \sim U[-a_n,a_n]$ 独立，今求

$$\zeta=\sum_{i=1}^{n}\zeta_i \tag{7.28}$$

之分布密度 $f_n(x)$[12]。

因 ζ_i 分布密度

$$g_i(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a_i}, & x\in[-a_i,a_i]\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7.29}$$

由傅里叶积分，知

$$f_1(x)=g_1(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}g_1(u)\cos t(u-x)du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dt\int_{-a_1}^{a_1}\frac{1}{2a_1}\cos t(u-x)du$$

$$=\frac{1}{2\pi a_1}\int_0^{\infty}\frac{1}{t}\{\sin t(a_1+x)+\sin t(a_1-x)\}dt$$

$$=\frac{1}{\pi a_1}\int_0^{\infty}\frac{1}{t}(\sin a_1 t)(\cos xt)dt$$

因卷积

$$f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-y)g_2(y)dy$$

$$=\frac{1}{2a_2}\int_{-a_2}^{a_2}f_1(x-y)dy$$

$$=\frac{1}{\pi a_1 a_2}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2}\sin a_1 t\sin a_2 t\cos xt dt$$

由归纳法得

$$f_n(x)=\frac{1}{\pi a_1 a_2\cdots a_n}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^n}\sin a_1 t\sin a_2 t\cdots\sin a_n t\cos xt dt$$

因

$$\prod_{i=1}^{n}\sin a_i t=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k_1,\cdots,k_{n-1}=1}^{2}(-1)^{k_1+\cdots+k_{n-1}}\cdot$$

$$\cdot\sin\left\{[a_1+(-1)^{k_1}a_2+\cdots+(-1)^{k_{n-1}}a_n]t-\frac{n-1}{2}\pi\right\}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\sin a_i t\cos xt=\frac{1}{2^n}\sum_{k_1,\cdots,k_{n-1},k_n=1}^{2}(-1)^{k_1+\cdots+k_{n-1}}\cdot$$

$$\cdot\sin\left\{[a_1+(-1)^{k_1}a_2+\cdots+(-1)^{k_{n-1}}a_n+(-1)^{k_n}x]t\right.$$

$$\left.-\frac{n-1}{2}\pi\right\}$$

但

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^2}\sin a_1 t\ \sin a_2 t\ \cos xt\ dt=\int_0^\infty \sin a_1 t \sin a_2 t \cos xt\ d\frac{-1}{t}$$

$$=\sin a_1 t \sin a_2 t \cos xt\left(\frac{-1}{t}\right)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty \frac{1}{t}\ \frac{d}{dt}$$

$$(\sin a_1 t \sin a_2 t \cos xt)dt$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{a_1 \sin a_1 t \sin a_2 t \cos xt}{a_1 t}=a_1\cdot 1\cdot 0\cdot 1=0$$

$$\lim_{t\to\infty}\ \sin a_1 t\ \sin a_2 t\ \cos xt\left(\frac{-1}{t}\right)=0$$

故

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^2}\sin a_1 t \sin a_2 t \cos xt dt$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{t}\ \frac{d}{dt}(\sin a_1 t \sin a_2 t \cos xt)dt$$

且有

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^n}\prod_{i=1}^n \sin a_i t \cos xt\ dt=\frac{1}{n-1}\int_0^\infty \frac{1}{t^{n-1}}\ \frac{d}{dt}$$

$$\left[\prod_{i=1}^n \sin a_i t \cos xt\right]dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty \frac{1}{t}\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}$$

$$\left[\prod_{i=1}^n \sin a_i t \cos xt\right]dt$$

于是

$$f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!\,\pi a_1 a_2\cdots a_n}\int_0^\infty \frac{1}{t}\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}$$

$$\left[\prod_{i=1}^{n}\sin a_i t\cos xt\right]dt$$

但

$$\frac{d}{dt}\sin\left\{at-\frac{n-1}{2}\pi\right\}=a\cos\left(at-\frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$=a\sin\left(at-\frac{n-1}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\sin\left\{at-\frac{n-1}{2}\pi\right\}=a^{n-1}\sin at$$

故

$$f_n(x)=\frac{1}{2^n(n-1)!\pi a_1a_2\cdots a_n}\int_0^\infty\frac{1}{t}\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{2}$$

$$\{(-1)^{k_1+\cdots+k_{n-1}}\times[a_1+(-1)^{k_1}a_2+\cdots+(-1)^{k_{n-1}}a_n$$
$$+(-1)^{k_n}x]^{n-1}\sin[a_1+(-1)^{k_1}a_2+\cdots$$
$$+(-1)^{k_{n-1}}a_n+(-1)^{k_n}x]t\}dt$$

因

$$\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

当 a 为正时，在下面积分中令 $at=y$，则

$$\int_0^\infty\frac{\sin at}{t}dt=\int_0^\infty\frac{\sin at}{at}dat=\int_0^\infty\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}$$

当 a 为负时，在下面积分中令 $at=y$，并注意$\frac{\sin y}{y}$为偶函数，则

$$\int_0^\infty\frac{\sin at}{t}dt=\int_0^\infty\frac{\sin at}{at}dat=\int_0^{-\infty}\frac{\sin y}{y}dy$$

$$=-\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin y}{y}dy=-\int_{0}^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy=-\frac{\pi}{2}$$

故令

$$G(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$$

则

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin \alpha t}{t}dt=\begin{cases}(-1)^{G(\alpha)}\dfrac{\pi}{2}, & \alpha\neq 0\\ 0, & \alpha=0\end{cases}$$

于是

$$f_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}(n-1)!a_1a_2\cdots a_n}\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{2}$$

$$(-1)^{k_1+\cdots+k_{n-1}+G[a_1+(-1)^{k_1}a_2+\cdots+(-1)^{k_n}x]}\cdot$$

$$\cdot[a_1+(-1)^{k_1}a_2+\cdots+(-1)^{k_{n-1}}a_n+(-1)^{k_n}x]^{n-1}$$

(7.30)

因 $f_n(x)$ 为偶函数，故 ξ 的分布函数

$$F_n(x)=0.5+\int_0^x f_n(x)dx=0.5+U_n(x)$$

而 $U_n(x)=\int_0^x f_n(x)dx$，于是

$$U_n(x)=\frac{1}{\pi a_1a_2\cdots a_n}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^{n+1}}\prod_{i=1}^{n}\sin a_it\sin xtdt$$

$$=\frac{1}{n!\pi a_1a_2\cdots a_n}\int_0^{\infty}\frac{1}{t}\frac{d^n}{dt^n}\prod_{i=1}^{n}\sin a_it\sin xtdt$$

$$=\frac{1}{n!\pi a_1a_2\cdots a_n}\int_0^{\infty}\frac{1}{t}\frac{d^n}{dt^n}\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}(-1)^{k_1+\cdots+k_n}\cdot$$

$$\cdot \sin\left\{[a_1+\cdots+(-1)^{k_{n-1}}a_n+(-1)^{k_n}x]\, t-\frac{n}{2}\pi\right\}dt$$

$$=\frac{1}{n!\pi a_1a_2\cdots a_n}\int_0^{\infty}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{n}(-1)^{k_n+\cdots+k_n}[a_1+\cdots$$

$$+(-1)^{k_{n-1}}a_n+(-1)^{k_n}x]^n\cdot$$

$$\sin\{[a_1+\cdots+(-1)^{k_{n-1}}a_n+(-1)^{k_n}x]t\}dt$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}n!a_1a_2\cdots a_n}\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{2}$$

$$(-1)^{k_1+\cdots+k_n}+G[a_1+(-1)^{k_1}a_2+\cdots+(-1)^{k_{n-1}}\cdot$$

$$a_n+(-1)^{k_n}x]\,[a_1+(-1)^{k_1}a_2+\cdots$$

$$+(-1)^{k_{n-1}}a_n+(-1)^{k_n}x]^n \tag{7.31}$$

而和 ζ 在 $[-x,x]$ 上概率为

$$P_n(x)=2U_n(x) \tag{7.32}$$

我们来看 $f_n(x)$ 的形态。

显然在 $[-\Sigma a_i,\Sigma a_i]$ 外 $f_n(x)$ 为 0，在 $[-\Sigma a_i,\Sigma a_i]$ 内如下。

当 $n=2$，设 $a_1\geqslant a_2$

$$\begin{cases}\dfrac{a_1+a_2+x}{4a_1a_2}, & x\in[-a_1-a_2,\ -a_1+a_2]\\[2ex] \dfrac{1}{2a_1}, & x\in[-a_1+a_2,\ a_1-a_2]\\[2ex] \dfrac{a_1+a_2-x}{4a_1a_2} & x\in[a_1-a_2,\ a_1+a_2]\end{cases}$$

即第五节中梯形分布。

当 $n=3$，设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3$

1． 当 $a_1-a_2\leqslant a_3$

$$
f_3(x)=\begin{cases}
\dfrac{1}{16a_1a_2a_3}(a_1+a_2+a_3+x)^2, & x\in[-a_1-a_2-a_3,-a_1-a_2+a_3] \\
\dfrac{1}{4a_1a_2}(a_1+a_2+x), & x\in[-a_1-a_2+a_3,-a_1+a_2-a_3] \\
\dfrac{1}{16a_1a_2a_3}\{8a_2a_3-(a_1-a_2-a_3+x)^2\}, & x\in[-a_1+a_2-a_3,a_1-a_2-a_3] \\
\dfrac{1}{8a_1a_2a_3}\{4a_2a_3-(a_1-a_2-a_3)^2-x^2\}, & x\in[a_1-a_2-a_3,-a_1+a_2+a_3] \\
\dfrac{1}{16a_1a_2a_3}\{8a_2a_3-(a_1-a_2-a_3-x)^2\}, & x\in[-a_1+a_2+a_3,a_1-a_2+a_3] \\
\dfrac{1}{4a_1a_2}(a_1+a_2-x), & x\in[a_1-a_2+a_3,a_1+a_2-a_3] \\
\dfrac{1}{16a_1a_2a_3}(a_1+a_2+a_3-x)^2, & x\in[a_1+a_2-a_3,a_1+a_2+a_3]
\end{cases}
$$

2. 当 $a_1-a_2\geqslant a_3$

$f_3(x)$亦在 x 的七个区间有不同形式。其中第一、二第六、七区间及其上 $f_3(x)$表式与上全同；第三区间改为 $x\in[-a_1+a_2-a_3,-a_1+a_2+a_3]$，第五区间改为 $x\in[a_1-a_2-a_3,a_1-a_2+a_3]$，但其上 $f_3(x)$表式与上全同；而在第四区间

$$f_3(x)=\frac{1}{2a_1},\ x\in[-a_1+a_2+a_3,a_1-a_2-a_3]$$

当 $n=4$，设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4$.

为简单起见，设 $a_1=1$，即取 a_1 为单位长。

当 $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4$ 无重点时，$f_4(x)$分为

$$2^4-1=15$$

段，每段有不同解析形式。

当 $1, a_1, a_2, a_3$ 大小关系不同时，则 $f_4(x)$形式不同。如

$$1-a_1-a_3 \leqslant 0$$

$$1-a_2-a_3+a_4 \leqslant 0$$

$$1-a_2-a_4 \geqslant 0$$

$$a_2-a_3-a_4 \geqslant 0$$

则

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{96a_2a_3a_4}(x+1+a_2+a_3+a_4)^3, \\
\qquad\qquad x \in [-1-a_2-a_3-a_4, -1-a_2-a_3+a_4] \\
\dfrac{1}{16a_2a_3}(x+1+a_2+a_3)^2+\dfrac{1}{48a_2a_3}a_4^2, \\
\qquad\qquad x \in [-1-a_2-a_3+a_4, -1-a_2+a_3-a_4] \\
\dfrac{-(x+1+a_2+a_3-a_4)^3}{96a_2a_3a_4}+\dfrac{(x+1+a_2+a_4)^2}{16a_2a_4} \\
\qquad\qquad +\dfrac{a_3^2}{48a_2a_4}, \\
\qquad\qquad x \in [-1-a_2+a_3-a_4, -1-a_2+a_3+a_4] \\
\dfrac{1}{4a_2}(x+1+a_2), \\
\qquad\qquad x \in [-1-a_2+a_3+a_4, -1+a_2-a_3-a_4] \\
\dfrac{-1}{96a_2a_3a_4}(x+1-a_2-a_3+a_4)^3
\end{array}\right.$$

$$
f_4(x)=\begin{cases}
-\dfrac{1}{16a_2a_4}(x+1+a_2-a_4)^2+\dfrac{x}{4a_4} \\
\quad +\dfrac{1}{4a_2a_4}\left(a_2a_4+a_2-\dfrac{a_3^2}{12}\right), \\
\qquad\qquad x\in[-1+a_2-a_3-a_4,\ -1+a_2-a_3+a_4] \\
\dfrac{-1}{16a_2a_3}(x+1-a_2-a_3)^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{a_4^2}{48a_2a_3}, \\
\qquad\qquad x\in[-1+a_2-a_3+a_4,\ 1-a_2-a_3-a_4] \\
\dfrac{-1}{48a_2a_3a_4}(x+a_4)^3+\dfrac{1}{96a_2a_3a_4} \\
\quad \cdot(x+1-a_2-a_3-a_4)^3-\dfrac{(x+a_4)(1-a_2-a_3)^2}{16a_2a_3a_4} \\
\quad +\dfrac{1}{2}, \qquad x\in[1-a_2-a_3-a_4,\ 1-a_2-a_3+a_4] \\
\dfrac{-x^2}{8a_2a_3}-\dfrac{a_4^2}{24a_2a_3}+\dfrac{1}{8a_2a_3}\{4a_2a_3-(1-a_2-a_3)^2\}, \\
\qquad\qquad x\in[1-a_2-a_3+a_4,\ -1+a_2+a_3-a_4] \\
\dfrac{1}{48a_2a_3a_4}(x-a_4)^3-\dfrac{1}{96a_2a_3a_4} \\
\quad \cdot(x-1+a_2+a_3+a_4)^3+\dfrac{(x-a_4)(1-a_2-a_3)^2}{16a_2a_3a_4} \\
\quad +\dfrac{1}{2}, \quad x\in[-1+a_2+a_3-a_4,\ -1+a_2+a_3+a_4] \\
\dfrac{-1}{16a_2a_3}(x-1+a_2+a_3)^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{a_4^2}{48a_2a_3}, \\
\qquad\qquad x\in[-1+a_2+a_3+a_4,\ 1-a_2+a_3-a_4] \\
\dfrac{1}{96a_2a_3a_4}(x-1+a_2+a_3-a_4)^3-\dfrac{1}{16a_2a_4} \\
\quad \cdot(x-1-a_2+a_4)^2-\dfrac{x}{4a_4}+\dfrac{1}{4a_2a_4}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\left(a_2a_4+a_2-\frac{a_3^2}{12}\right),\\
&\qquad x\in[1-a_2+a_3-a_4,\ 1-a_2+a_3+a_4]\\
&\frac{-1}{4a_2}(x-1-a_2),\\
&\qquad x\in[1-a_2+a_3+a_4,\ 1+a_2-a_3-a_4]\\
&\frac{(x-1-a_2-a_3+a_4)^3}{96a_2a_3a_4}+\frac{(x-1-a_2-a_4)^2}{16a_2a_4}\\
&\quad+\frac{a_3^2}{48a_2a_4},\ x\in[1+a_2-a_3-a_4,\ 1+a_2-a_3+a_4]\\
&\frac{1}{16a_2a_3}(x-1-a_2-a_3)^2+\frac{1}{48a_2a_3}a_4^2,\\
&\qquad x\in[1+a_2-a_3+a_4,\ 1+a_2+a_3-a_4]\\
&\frac{-1}{96a_2a_3a_4}(x-1-a_2-a_3-a_4)^3,\\
&\qquad x\in[1+a_2+a_3-a_4,\ 1+a_2+a_3+a_4]
\end{aligned}
$$

一般，$f_n(x)$在$[-\Sigma a_i,\Sigma a_i]$外为 0，在$[-\Sigma a_i,\Sigma a_i]$内可分为2^n-1个区间（若$a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n$无重点），每个区间上$f_n(x)$的形式不同。

我们常需求均匀分布和在$[-x,x]$上的概率$P_n(x)$及置信因子k，现算得它们如附表 7。

附表 7 中列出：当$a_1=1\geqslant a_2=a_1(0.1)0\geqslant a_3=a_2(0.1)0\geqslant a_4=a_3(0.1)0$时

1. 标准差σ及$P(\sigma)$之值；

2. $x=0.5(0.5)\left[\dfrac{\Sigma a_i}{0.5}\right]0.5$之$P_n(x)$值

3. 对应置信概率$P=0.6827$，0.95，0.9545，0.99，0.9973 之置信因子k。

第八章　多元分布基础

第一节　随机向量基本性质

一、数字特征

对于随机向量

$$\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} \tag{8.1}$$

由第四章第二节，我们知道，ξ的期望

$$E\xi=\begin{pmatrix}E\xi_1\\ E\xi_2\\ \vdots\\ E\xi_n\end{pmatrix} \tag{8.2}$$

ξ的方差阵

$$V\xi=E\{(\xi-E\xi)(\xi-E\xi)'\}=\begin{pmatrix}E\{(\xi_1-E\xi_1)^2\} & E\{(\xi_1-E\xi_1)(\xi_2-E\xi_2)\} & \cdots\\ E\{(\xi_1-E\xi_1)(\xi_2-E\xi_2)\} & E\{(\xi_2-E\xi_2)^2\} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{8.3}
$$

故$V\xi$为$n\times n$阶对称阵，主对角元素为分量方差，非主对角元素为分量间协方差。

当各分量无关，则$V\xi$为对角阵。反之，若$V\xi$为对角阵，则各分量无关。

二、特征函数

随机向量ξ的特征函数指

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &= E(e^{it'\xi}) \\
&= E\{e^{i(t_1\xi_1+t_2\xi_2+\cdots+t_n\xi_n)}\}
\end{aligned} \tag{8.4}
$$

其中

$$
t=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdot \\ t_n \end{pmatrix}
$$

在$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$中任一组$k$个变量的特征函数可将其余$n-k$个变量对应$t_i$取0而得，如前$k$个的特征函数为

$$
E\{e^{i(t_1\xi_1+t_2\xi_2+\cdots+t_k\xi_k)}\}=\theta(t_1,t_2,\cdots,t_k,0,\cdots,0) \tag{8.5}
$$

三、线性变换

若随机向量ξ、η间有关系

$$
\eta=A_0+A\xi \tag{8.6}
$$

则

$$
E\eta=A_0+AE\xi \tag{8.7}
$$

$$V\eta = A(V\xi)A' \tag{8.8}$$

此因

$$E\eta = A_0 + E(A\xi) = A_0 + AE\xi$$

$$V\eta = E\{(\eta - E\eta)(\eta - E\eta)'\}$$

$$= E\{A(\xi - E\xi)(\xi - E\xi)'A'\} = A(V\xi)A'$$

例 若对某量a独立测得x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 且相应权为p_i, 然后算出加权平均

$$x = \frac{1}{\Sigma p_i}\Sigma p_i x_i$$

作为a的最佳值。今求残差$v_i = x_i - x$的方差。

以$v_1 = x_1 - x$为例，因

$$v_1 = x_1 - \frac{1}{\Sigma p_i}\Sigma p_i x_i$$

记

$$\sum_{i \neq 1} p_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} p_i = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$$

则

$$v_1 = \frac{\sum\limits_{i \neq 1} p_i}{\Sigma p_i} x_1 - \frac{p_2}{\Sigma p_i} x_2 - \cdots - \frac{p_n}{\Sigma p_i} x_n$$

$$= \left(\frac{\sum\limits_{i \neq 1} p_i}{\Sigma p_i}, \ \frac{-p_2}{\Sigma p_i}, \ \cdots, \ \frac{-p_n}{\Sigma p_i} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

因各x_i独立从而无关，于是

$$V\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & & & \\ & \frac{1}{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}$$

故

$$Vv_1 = \left(\frac{\sum\limits_{i \neq 1} p_i}{\Sigma p_i}, \ \frac{-p_2}{\Sigma p_i}, \ \cdots, \ \frac{-p_n}{\Sigma p_i} \right) \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & & & \\ & \frac{1}{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum\limits_{i \neq 1} p_i / \Sigma p_i \\ -p_2/\Sigma p_i \\ \vdots \\ -p_n/\Sigma p_i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sigma^2}{p_1}\left(1 - \frac{2p_1}{\Sigma p_i} + \frac{p_1^2}{(\Sigma p_i)^2}\right) + \frac{\sigma^2}{p_2} \cdot \frac{p_2^2}{(\Sigma p_i)^2} + \cdots + \frac{\sigma^2}{p_n} \cdot \frac{p_n^2}{(\Sigma p_i)^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{p_1}\left(1 - \frac{2p_1}{\Sigma p_i}\right) + \frac{\sigma^2}{(\Sigma p_i)^2}(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$$

$$= \frac{\sigma^2}{p_1} - \frac{\sigma^2}{\Sigma p_i}$$

$$=\sigma_i^2-\sigma_x^2$$

一般成立

$$Vv_i=\sigma_i^2-\sigma_x^2$$

即

$$V(x_i-x)=\sigma_i^2-\sigma_x^2 \tag{8.9}$$

即x_i的残差的方差等于x_i的方差减加权平均的方差。

当对某量等精度独立测得x_i，算出平均值

$$x=\frac{1}{n}\Sigma x_i$$

则亦有

$$V(x_i-x)=\sigma_i^2-\sigma_x^2$$

四、期望方差阵及协方差阵性质

下面设A，B，C，D为常量矩阵

（一） 期望方差阵

1. $EC=C$
2. $E(A\xi)=AE\xi$
3. $E(A\xi+B\eta)=AE\xi+BE\eta$
4. $V(A\xi)=A(V\xi)A'$

（二） 协方差阵

两随机向量$\underset{n1}{\xi}$，$\underset{m1}{\eta}$间协方差阵指

$$\sigma_{\xi\eta}=E\{(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)'\}$$

$$=\begin{pmatrix} E(\xi_1-E\xi_1)(\eta_1-E\eta_1) & E(\xi_1-E\xi_1)(\eta_2-E\eta_2)\cdot \\ E(\xi_2-E\xi_2)(\eta_1-E\eta_1) & E(\xi_2-E\xi_2)(\eta_2-E\eta_2)\cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\sigma_{\xi\eta}$亦记作$cov(\xi,\eta)$，它是一个nm阶非对称矩阵。若ξ、η无关（指相互分量无关）则$\sigma_{\xi\eta}=0$。

我们有

1. $\sigma_{\xi\eta}=\sigma_{\eta\xi}'$，$\sigma_{\xi\xi}=V\xi$

2. $\sigma_{\xi\eta}=E(\xi\eta')-(E\xi)(E\eta)'$

3. 若$\psi=A\xi$，$\zeta=B\eta$，则

$$\sigma_{\psi\zeta}=A\sigma_{\xi\eta}B' \tag{8.10}$$

4. 若$\psi=A\xi$，$\zeta=B\xi$，则

$$\sigma_{\psi\zeta}=A\sigma_{\xi\xi}B'=A(V\xi)B' \tag{8.11}$$

此时ψ与ζ无关的充要条件是

$$A(V\xi)B'=0$$

5. 若$\psi=A\xi+B\eta$，则

$$V\psi=A(V\xi)A'+B(V\eta)B'+A\sigma_{\xi\eta}B'+B\sigma_{\eta\xi}A'$$

当ξ，η无关，则

$$V\psi=A(V\xi)A'+B(V\eta)B'$$

6. 若$\psi=A\xi+B\eta$，$\zeta=C\xi+D\omega$，则

$$\sigma_{\psi\zeta}=A(V\xi)C'+A\sigma_{\xi\omega}D'+B\sigma_{\eta\xi}C'+B\sigma_{\eta\omega}D'$$

第二节　连续随机向量变换

我们经常要从随机向量

$$\underset{m1}{\xi}=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \cdot\\ \xi_m\end{pmatrix}$$

导出另一随机向量

$$\underset{n1}{\eta}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \cdot\\ \eta_n\end{pmatrix}$$

这时也叫η是由ξ变换而得，并需要研究它们性质的关系。

性质 1 若$\xi=(\xi_1,\cdot,\xi_n)'$的密度为$f(x_1,\cdot,x_n)$，而

$$\eta_i=y_i(\xi_1,\cdot,\xi_n),\quad i=1,2,\cdots,n$$

作成ξ到$\eta=(\eta_1,\cdot,\eta_n)'$的一对一变换。并设变换

$$y_i=y_i(x_1,\cdot,x_n)$$

1. 存在唯一反函数$x_i(y_1,\cdot,y_n)$

2. 存在连续偏导数$\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$，…，$\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$

则向量η有密度

$$g(y_1,\cdot,y_n)=f(x_1,\cdot,x_n)\,|J(X,Y)|\tag{8.12}$$

其中$J(x,y)$为X对Y的雅可比行列式，而

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \cdot\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$J(X,Y)=\left|\frac{dX}{dY}\right|=\left|\frac{\partial(x_1,\cdot,x_n)}{\partial(y_1,\cdot,y_n)}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdot & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdot & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

且

$$\left|\frac{\partial(x_1,\cdot,x_n)}{\partial(y_1,\cdot,y_n)}\right|=1/\left|\frac{\partial(y_1,\cdot,y_n)}{\partial(x_1,\cdot,x_n)}\right|$$

证　由多元函数积分变换，知

$$f(x_1,\cdot,x_n)dx_1\cdot dx_n=f(x_1(y_1,\cdot,y_n),\cdot,x_n(y_1,\cdot,y_n))$$
$$|J(X,Y)|dy_1\cdot dy_n$$

故η密度

$$g(y_1,\cdot,y_n)=f(x_1,\cdot,x_n)|J(X,Y)|$$

再将Y变成X，由

$$f(x_1,\cdot,x_n)\ dx_1\cdot dx_n=f\ (x_1,\cdot,\ x_n)\left|\frac{\partial(x_1,\cdot,x_n)}{\partial(y_1,\cdot,y_n)}\right|$$
$$\left|\frac{\partial(y_1,\cdot,y_n)}{\partial(x_1,\cdot,x_n)}\right|dx_1\cdot dx_n$$

得证

$$\left|\frac{\partial(x_1,\cdot,x_n)}{\partial(y_1,\cdot,y_n)}\right|=1/\left|\frac{\partial(y_1,\cdot,y_n)}{\partial(x_1,\cdot,x_n)}\right|$$

所谓雅可比式指

1. 对向量

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \\ y_n\end{pmatrix}$$

$$J(Y,X)=\left|\frac{dY}{dX}\right|=\left|\frac{\partial(y_1,\cdot,y_n)}{\partial(x_1,\cdot,x_n)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

$$=1/\left|\frac{\partial(x_1,\cdot,x_n)}{\partial(y_1,\cdot,y_n)}\right|=1/\left|\frac{dX}{dY}\right|=\frac{1}{J(X,Y)}$$

2. 对矩阵

$$\underset{pn}{Y}=\begin{pmatrix} y_{11} & \cdot & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{p1} & \cdot & y_{pn} \end{pmatrix}, \quad \underset{pn}{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdot & x_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{p1} & \cdot & x_{pn} \end{pmatrix}$$

而Y与X无相同元素，有

$$J(Y, X)=\left|\frac{\partial(y_{11},y_{21},\cdot,y_{p1},y_{12},\cdot,y_{p2},\cdot,y_{1n},\cdot,y_{pn})}{\partial(x_{11},x_{21},\cdot,x_{p1},x_{12},\cdot,x_{p2},\cdot,x_{1n},\cdot,x_{pn})}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{11}} & \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{21}} & \cdot & \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{p1}} & \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{12}} & \cdot & \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{p2}} & \cdot & \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{1n}} & \cdot & \frac{\partial y_{11}}{\partial x_{pn}} \\ \frac{\partial y_{21}}{\partial x_{11}} & \frac{\partial y_{21}}{\partial x_{21}} & \cdot & \frac{\partial y_{21}}{\partial x_{p1}} & \frac{\partial y_{21}}{\partial x_{12}} & \cdot & \frac{\partial y_{21}}{\partial x_{p2}} & \cdot & \frac{\partial y_{21}}{\partial x_{1n}} & \cdot & \frac{\partial y_{21}}{\partial x_{pn}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_{pn}}{\partial x_{11}} & \frac{\partial y_{pn}}{\partial x_{21}} & \cdot & \frac{\partial y_{pn}}{\partial x_{p1}} & \frac{\partial y_{pn}}{\partial x_{12}} & \cdot & \frac{\partial y_{pn}}{\partial x_{p2}} & \cdot & \frac{\partial y_{pn}}{\partial x_{1n}} & \cdot & \frac{\partial y_{pn}}{\partial x_{pn}} \end{vmatrix}$$

将矩阵Y按列分块写为

$$Y=(y_1,y_2,\cdot,y_n)$$

则将y_{i+1}排于y_i之下，我们可以得到一个pn维列向量，它称为Y的列化向量$\vec{Y}$，即

$$\vec{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

于是

$$J(Y,X)=J(\vec{Y},\vec{X})$$

3. 对于对称方阵

$$Y=\begin{pmatrix} y_{11} & \cdot & y_{n1} \\ \cdot & & \cdot \\ y_{n1} & \cdot & y_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdot & x_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdot & x_{nn} \end{pmatrix}$$

它们除对称元素相同外，无相同元素，有

$$J(Y,X)=\left|\frac{\partial(y_{11},y_{21},\cdot,y_{n1},y_{22},\cdot,y_{n2},\cdot,y_{nn})}{\partial(x_{11},x_{21},\cdot,x_{n1},x_{22},\cdot,x_{n2},\cdot,x_{nn})}\right|$$

即此时只计Y，X左下三角部分元素。

性质2 同性质1条件，若$\underset{p1}{X}$变到$\underset{p1}{Y}$再变到$\underset{p1}{Z}$，则X到Z变换之

$$\left|\frac{\partial(z_1,\cdot,z_p)}{\partial(x_1,\cdot,x_p)}\right|=\left|\frac{\partial(z_1,\cdot,z_p)}{\partial(y_1,\cdot,y_p)}\right|\left|\frac{\partial(y_1,\cdot,y_p)}{\partial(x_1,\cdot,x_p)}\right|$$

证 因

$$\frac{\partial(z_1,\cdot,z_p)}{\partial(y_1,\cdot,y_p)}\cdot\frac{\partial(y_1,\cdot,y_p)}{\partial(x_1,\cdot,x_p)}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdot & \frac{\partial z_1}{\partial y_p} \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial z_p}{\partial y_1} & \cdot & \frac{\partial z_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial y_1}{\partial x_p} \\ \cdot & \cdot & \\ \frac{\partial y_p}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial y_p}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

乘积矩阵中i行j列元素

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\ \frac{\partial y_k}{\partial x_j}=\frac{\partial z_i}{\partial x_j}$$

恰为$\dfrac{\partial(z_1,\cdot,z_p)}{\partial(x_1,\cdot,x_p)}$中$i$行$j$列元素。

性质 3 若

$$\underset{pn}{Y}=\underset{pp}{A}\ \underset{pn}{X}$$

则 $J(Y,X)=|A|^n$

证　因

$$y_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}x_{kj}$$

故

$$\left(\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{11}},\cdot,\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{p1}},\cdot,\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{1j}},\cdot,\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{pj}},\cdot,\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{1n}},\cdot,\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{pn}}\right)$$

$$=(0,\cdot,0,\cdot,a_{i1},\cdot,a_{ip},\cdot,0,\cdot,0)$$

于是

$$J(Y,X)=\begin{vmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{vmatrix}=|A|^n$$

系　若$n=1$，即$\underset{p1}{Y}=\underset{pp}{A}\underset{p1}{X}$，则$J(Y,X)=|A|$。

性质 4　设$\underset{pp}{X}$对称，$\underset{pp}{C}$为非异方阵，
$Y=CXC'$，则$J(Y,X)=|C|^{p+1}$

证　因非异方阵C可写为初等矩阵C_k之积，即

$$C=C_1C_2\cdots C_k$$

于是

$$Y=C_1C_2\cdots C_kXC_k'\cdots C_2'C_1'$$

如能证性质对初等矩阵成立，则由性质2

$$J(Y,X)=|C_k|^{p+1}\cdots|C_2|^{p+1}|C_1|^{p+1}=|C|^{p+1}$$

即知性质对非异方阵成立。

现往证性质对初等矩阵成立，由第二章第三节四，我们知道第(Ⅱ)种初等矩阵可表为(Ⅰ)(Ⅲ)种初等矩阵之积，故只须对(Ⅰ)种初等矩阵D_i及(Ⅲ)种初等矩阵$E_{ij}(\lambda)$证明即

可；因

$$E_{ij}(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & 1 \cdot \lambda & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$D_i(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

设$Y=E_{ij}(\lambda)XE'_{ij}(\lambda)$，因$X$对称，故$Y$对称，而

$$Y=\begin{pmatrix}x_{11} & \cdot & x_{i1}+\lambda x_{j1} & \cdot & x_{p1} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ x_{i1}+\lambda x_{j1} & \cdot & x_{ii}+2\lambda x_{ij}+\lambda^2 x_{jj} & \cdot & x_{pi}+\lambda x_{pj} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ x_{p1} & \cdot & x_{pi}+\lambda x_{pj} & \cdot & x_{pp}\end{pmatrix}$$

而$J(Y,X)$是一个三角阵，主对角元素为1，故

$$J(Y,X)=1=|E_{ij}(\lambda)|^{p+1}$$

设 $\qquad Y=D_i(\lambda)XD'_i(\lambda)$，则

$$Y=\begin{pmatrix}x_{11} & \cdot & \lambda x_{i1} & \cdot & x_{p1} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \lambda x_{i1} & \cdot & \lambda^2 x_{ii} & \cdot & \lambda x_{pi} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ x_{p1} & \cdot & \lambda x_{pi} & \cdot & x_{pp}\end{pmatrix}$$

而$J(Y,X)$为一对角阵，主对角元素有 $p-1$ 个为 λ，1个为λ^2，其余为1，故

$$J(Y,X)=\lambda^{p-1}\cdot\lambda^2=\lambda^{p+1}=|D_2(\lambda)|^{p+1}$$

第三节　正态随机向量

一、二维正态随机向量

二维正态随机向量$\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$在$X=\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}$点密度由式(3.17)知为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(X_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

其中μ_1，σ_1^2为ξ_1的期望与方差，μ_2，σ_2^2为ξ_2的期望与方差，ρ为ξ_1与ξ_2的相关系数。

我们知道，二维正态随机向量的无关与独立等价。

用平行于平面X_1OX_2的平面截$f(x_1,x_2)$所描绘的钟形分布曲面，将截线（椭圆）投影到X_1OX_2，得到一族相似的具有同一中心(μ_1,μ_2)的椭圆

$$\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$$

$$=\text{const}$$

对每一椭圆上所有点，分布密度是同一常数，这族椭圆称为误差椭圆。

引用期望与方差阵

$$E\xi=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}=\mu$$

$$V\xi=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}=\Sigma$$

则

$$|\Sigma|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}\\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2}\end{pmatrix}$$

于是

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)\right\}$$

二、n维正态随机向量

随机向量$\underset{n1}{\xi}$服从n维正态分布指其在$\underset{n1}{X}$点处的密度

$$f(x_1,\cdot,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\Sigma|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)\right\} \tag{8.13}$$

其中$\underset{n1}{\mu}$为ξ的期望，$\underset{nn}{\Sigma}$为ξ的方差阵。此时记为$\xi\sim N_n(\mu,\Sigma)$或$\xi\sim N(\mu,\Sigma)$。

性质 1 若$\xi\sim N(\mu,\Sigma)$，则其特征函数

$$\theta(t)=\exp\left(i\mu' t-\frac{1}{2}t'\Sigma t\right) \tag{8.14}$$

证

1. 先证若A为对称阵，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{it'X-\frac{1}{2}X'AX}dx_1\cdots dx_n$$

$$=\frac{(2\pi)^n}{\sqrt{|A|}}e^{-\frac{1}{2}t'A^{-1}t} \tag{8.15}$$

对A存在正交阵C使

$$C'AC=K=\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$$

其中k_i为A的特征根。令

$$t=\begin{pmatrix} t_1 \\ \cdot \\ t_n \end{pmatrix},\quad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}$$

而 $t=Cu$, 又按 $X=CY$ 作 Y，则 $t'X=u'C'CY=u'Y$, $X'AX=Y'C'ACY=Y'KY$，因$|J(X,Y)|=1$，故积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu'Y-\frac{1}{2}Y'KY}dy_1\cdots dy_n$$

$$=\prod_j\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_jy_j-\frac{1}{2}k_jy_j^2}dy_j$$

因一维正态分布的特征函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

故

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_jy_j-\frac{1}{2}k_jy_j^2}dy_j=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_j}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{k_j}u_j^2}$$

因$\sqrt{k_1k_2\cdots k_n}=|K|^{\frac{1}{2}}=|A|^{\frac{1}{2}}$，故

$$I=\frac{1}{\sqrt{|A|}}(2\pi)^{n/2}e^{-\frac{1}{2}u'K^{-1}u}$$

又因 $u'K^{-1}u=u'C'A^{-1}Cu=t'A^{-1}t$，故

$$I=\frac{1}{\sqrt{|A|}}(2\pi)^{n/2}e^{-\frac{1}{2}t'A^{-1}t}$$

2. 因

$$\theta(t)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\Sigma|}}\int\cdots\int e^{it'X}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)\right\}dx_1\cdots dx_n$$

$$=\frac{e^{it'\mu}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\Sigma|}}\int\cdots\int e^{it'(X-\mu)-\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)}$$

$dx_1\cdots dx_n$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\Sigma|}}e^{it'\mu}\cdot\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|\Sigma^{-1}|}}e^{-\frac{1}{2}t'\Sigma t}$$

$$=\exp(i\mu't-\frac{1}{2}t'\Sigma t)$$

性质 2 n维正态向量分量的无关与独立等价。

证 由第四章第三节相关系数性质2，知独立导致无关。又若ξ的分量无关，则其方差阵Σ为对角阵，从而ξ的密度

$$f(x_1,\cdot,x_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}\exp\sum_{i=1}^{n}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)=\prod f_i(x_i)$$

于是各分量独立。

性质 3 若$\xi\sim N(\mu,\Sigma)$则

$$\eta = A_0 + A\xi \sim N(A_0 + A\mu, A\Sigma A') \tag{8.16}$$

其中A_0为$m\times 1$阶常量阵，A为mn阶常量阵。

证　对ξ，其特征函数

$$\theta(t) = \exp\left(i\mu' t - \frac{1}{2}t'\Sigma t\right)$$

取$t = A'u$并以u作为η特征函数的自变量，则因$\eta - A_0 = A\xi$，$t'\xi = u'A\xi = u'(\eta - A_0)$，而

$$\theta(t) = E(e^{it'\xi}) = E(e^{iu'(\eta - A_0)}) = e^{-iu'A_0}E(e^{iu'\eta})$$

于是η的特征函数

$$\begin{aligned}\psi(u) &= E(e^{iu'\eta}) \\ &= e^{iu'A_0}\theta(t) \\ &= \exp\left(iu'A_0 + i\mu' t - \frac{1}{2}t'\Sigma t\right)\end{aligned}$$

注意1×1阶矩阵$u'A_0 = A_0'u$，故

$$\psi(u) = \exp\left(i(A_0 + A\mu)'\mu - \frac{1}{2}u'(A\Sigma A')u\right)$$

$$\eta \sim N(A_0 + A\mu, A\Sigma A')$$

性质 4　若$\xi \sim N(0, \sigma^2 I)$，且$C$为正交阵，则$\eta = C\xi \sim N(0, \sigma^2 I)$

证　由性质3，因此时$A_0 = 0$，$\mu = 0$，$A = C$，代入性质3结论即可。

此性质说明等精度独立各正态分布偶然误差经正交变换后性质不变。

第四节　样本与统计量

在数理统计中，称所研究的随机变量ξ的全体为总体，从总体中随机地选出几个值（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n），这个向量称

为样本，n称为样本大小或容量。

由于样本是从总体中随机选取的，因此它有代表性，即各ξ_i与总体ξ有相同分布。

一般，样本选取是独立的，即ξ_1，ξ_2，…，ξ_n是相互独立的随机变量．于是，若总体ξ的分布函数与分布密度为$F(x)$与$f(x)$，则$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$的分布函数与分布密度为$\Pi F(x_i)$与$\Pi f(x_i)$。

样本的函数称为统计量．如有两个样本

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$$

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$$

则有统计量如样本期望

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\Sigma\xi_i$$

样本方差

$$s_1^2 = \frac{1}{n}\Sigma(\xi_i - \bar{\xi})^2$$

样本相关系数

$$r = \frac{\Sigma(\xi_i - \bar{\xi})(\eta_i - \bar{\eta})}{\sqrt{\Sigma(\xi_i - \bar{\xi})^2 \cdot \Sigma(\eta_i - \bar{\eta})^2}}$$

第五节　直接测量中的分布

一、一般分布

若我们对某量等精度独立测得

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

一般x_i服从正态分布，于是$x_1, x_2, \cdots, x_n$为独立同分布$N(\mu, \sigma^2)$变量。

此时有

1. $\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ (8.17)

$$\frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{8.18}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\Sigma(x_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n) \tag{8.19}$$

上述显然。且

2. $\frac{1}{\sigma^2}\Sigma(x_i-\bar{x})^2 \sim \chi^2(n-1)$ (8.20)

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}} \sim t(n-1) \tag{8.21}$$

为证明上述两式，我们先引出一个引理。

费希尔（Fisher）引理 若$x_1,x_2,\cdots,x_n$为独立同分布$N(0,\sigma^2)$变量，且有$p<n$个线性函数

$$y_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n, i=1,2,\cdots,p$$

其中c_{ij}满足正交条件和标准化条件

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\ c_{kj}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}$$

则二次型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-y_1^2-\cdots-y_p^2$$

不依赖于$y_1,\cdots,y_p$且有

$$\frac{Q}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-p)$$

证 由第二章第八节性质6知，对标准正交列向量系所

形成的高阵G，可找得另一高阵，与G配成正交阵，于是，我们知道，以$(c_{i1},\ \cdots,\ c_{in})$，$i=1,\ \cdots,\ p$为前$p$行向量，可找得正交阵$\underset{nn}{C}=(c_{ik})$，作正交变换

$$\underset{n1}{Y}=\underset{nn}{C}\underset{n1}{X}$$

则因$X\sim N(0,\sigma^2 I)$，故$Y\sim N(0,\sigma^2 I)$，因此$y_i\sim N(0,\sigma^2)$独立，而

$$Q=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-y_1^2-\cdots-y_p^2=y_{p+1}^2+\cdots+y_n^2$$

因此Q不依赖于$y_1,\cdots,y_p$且是$n-p$个独立正态变量平方和，得证。

往下证明我们的结论。

由于$\bar{x}-\mu$与$x_i-\bar{x}$与x_i平移无关，故可考虑测量值$x_i\sim N(0,\sigma^2)$独立情况。

因

$$s_1^2=\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})^2$$

$$ns_1^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2$$

用引理，取$p=1$，$y_1=\sqrt{n}\,\bar{x}=\frac{x_1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{n}}$，可知

$$\frac{ns_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

且与$y_1=\sqrt{n}\bar{x}$无关。但$\bar{x}\sim N\left(\mu=0,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$，故

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}}=\frac{(\bar{x}-\mu)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2(n-1)}}}\sim t(n-1)$$

得证。

例1 若测量一次的偶然误差标准差为σ，则由$\bar{x}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，知平均值的标准差为$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，从而多次测量后平均值的误差比一次测量的误差减至$\frac{1}{\sqrt{n}}$倍。

例2 对于t分布，按t分布表附表3可查出

$$P(|t|\leqslant t_p(\nu))=p$$

中临界值$t_p(\nu)$。因

$$(\bar{x}-\mu)/\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}\sim t(n-1)$$

故

$$P\left(|\bar{x}-\mu|\leqslant t_p(n-1)\cdot\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}\right)=p$$

而$\bar{x}$的极限误差（置信概率p）为

$$\Delta=t_p(n-1)\cdot\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{8.22}$$

如对某量测5次，得

299950
45
61
40
67

则$\bar{x}=299953$，取置信概率$p=0.95$，由附表3查得$t_{0.95}(4)=$

2.78，而

$$\Delta=2.78\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}=2.78\times5.0=13.9$$

取置信概率$p=0.9973$，由同表查得$t_{0.9973}(4)=6.62$，而

$$\Delta=6.62\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}=6.62\times5.0=33.1$$

二、汤普森分布

（一） 定义

若ξ_1，ξ_2，…，ξ_n为独立同分布$N(0,\sigma^2)$变量，称

$$\tau=\frac{\xi_1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}} \tag{8.23}$$

为服从参数$n-1$的汤普森（Thompson）分布$\tau(n-1)$。

下面我们求汤普森分布的密度。

显然$|\tau|\leqslant\sqrt{n}$，因

$$t=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\tau^2}{n}}}=\frac{\xi_1}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\xi_i^2}}\sim t(n-1)$$

当τ由$-\sqrt{n}$增至$\sqrt{n}$，t由$-\infty$增至∞，若$t(n-1)$的分布函数记为$S_{n-1}(x)$，则

$$P(\tau<x)=P\left(t<\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n}}}\right)$$

$$=S_{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n}}}\right)$$

求导得$\tau(n-1)$的密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}} \tag{8.24}$$

其中$|x|\leqslant n$，当$|x|>n$时$f(x)=0$。

当$n=2$时，上式为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

故$\tau(1)$为反正弦分布。

当$n=3$时，上式为

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

故$\tau(2)$为均匀分布。

当$n>3$，汤普森为对$x=0$对称的单峰分布。

对一切n，汤普森分布期望为0，标准差为1。

（二） 应用

若对某量测得x_1，x_2，…，$x_n\sim N(\mu, \sigma^2)$独立，算出平均值和

$$s_1=\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$$

则

$$\frac{x_1-\bar{x}}{s_1}\sim\tau(n-2) \tag{8.25}$$

今证之。无妨于证明，设$\mu=0$，对$\underset{n1}{X}$用正交变换变为$\underset{n1}{Y}$，而且

$$y_1=\sqrt{n}\,\bar{x}=\frac{x_1}{\sqrt{n}}+\frac{x_2}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{n}}$$

$$y_2=\sqrt{\frac{n}{n-1}}(x_1-\bar{x})=\sqrt{\frac{n-1}{n}}x_1-\frac{x_2}{\sqrt{n(n-1)}}$$

$$-\cdots-\frac{x_n}{\sqrt{n(n-1)}}$$

因

$$ns_1^2=\Sigma(x_i-\bar{x})^2=\Sigma x_i^2-n\bar{x}^2=\sum_{i=2}^{n}y_i^2$$

于是

$$\frac{x_1-x}{s_1}=\frac{y_2}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}y_i^2}}$$

这里y_2，…，$y_n \sim N(0,\sigma^2)$独立，得证。

在研究粗差时会用到汤普森分布。

$\tau(n-2)$在显著性水平α时临界值$\tau_\alpha(n-2)$以 n 为引数可由表8.1查出，而$\tau_\alpha(n-2)$为满足

$$P(|\tau(n-2)|>\tau_\alpha(n-2))=\alpha$$

中的$\tau_\alpha(n-2)$。如$n=6$时，$\tau_{0.05}(6-4)=1.814$。

$\tau_\alpha(n-2)$可根据t分布表附表3算出，因t分布临界值t_α满足

$$P(|t(n-2)|>t_\alpha(n-2))=\alpha$$

故

$$\tau_\alpha^2(n-2)=\frac{(n-1)\times t_\alpha^2(n-2)}{(n-2)+t_\alpha^2(n-2)}$$

表8.1　$\tau(n-2)$临界值

α \ n	3	4	5	6	7	8
0.05	1.409	1.645	1.757	1.814	1.848	1.870
0.01	1.414	1.715	1.918	2.051	2.142	2.207
α \ n	9	10	15	20	25	30
0.05	1.885	1.895	1.923	1.934	1.941	1.944
0.01	2.256	2.294	2.399	2.447	2.475	2.493

三、极差分布

将某量测得值x_i按大小排成顺序量

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)},$$

若独立测得值 x_i 的密度为 $f(x)$，则顺序量的联合密度为 $n!\,f(y_1')f(y_2')\cdots f(y_n')$。最小值$x_{(1)}$与最大值$x_{(n)}$的联合密度为

$$f(y_1,y_2)=\begin{cases} n(n-1)\left(\int_{y_1}^{y_n} f(x)dx\right)^{n-2} f(y_1)f(y_2), & y_1<y_n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

而极差$w=x_{(n)}-x_{(1)}$与$x_{(1)}$联合密度为

$$f(R,y_1)=\begin{cases} n(n-1)\left(\int_{y_1}^{R+y_1} f(x)dx\right)^{n-2} f(y_1)f(R+y_1), & R>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

于是w的密度当$R\leqslant 0$时为0，当$R>0$时为

$$f(R)=n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{x}^{x+R} f(x)dx\right)^{n-2} f(x)f(x+R)dx$$

当$x_i\sim N(\mu,\sigma^2)$独立，若记

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

则$R>0$时$f(R)$表达式当$n=2$时为

$$f(R)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{R^2}{4}\right)$$

此时 $E=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$，$\sigma=\sqrt{2-\frac{4}{\pi}}$。

当$n=3$时

$$f(R)=\frac{3!\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{R/\sqrt{6}}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)dt$$

当$n=4$时

$$f(R)=\frac{4!\sqrt{2}}{(\sqrt{2\pi})^2}\varphi\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\left[\frac{\pi}{2}-\int_{-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}}\exp\left(-\frac{1}{12}R^2\sec^2\theta\right)d\theta\right]$$

极差可用来算标准差。

四、最大残差分布

若对某量测得x_1，x_2，…，$x_n \sim N(\mu,\ \sigma^2)$独立，则经常要算残差

$$v_i=x_i-\frac{1}{n}\Sigma x_i$$

则绝对值最大的残差$\max|v_i|$的分布函数为[13]

$$F(a)=\int\underset{\Omega}{\cdots}\int\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{|M|}}\exp\left(-\frac{1}{2}X'M^{-1}X\right)dx_1\cdots dx_n$$

其中M为$(n-1)\times(n-1)$阶方差阵

$$M=\begin{pmatrix} \frac{n-1}{n}\sigma^2 & -\frac{1}{n}\sigma^2 & \cdot \\ -\frac{1}{n}\sigma^2 & \frac{n-1}{n}\sigma^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

而积分域

Ω: $|x_1|<a$; $\cdots$, $|x_{n-1}|<a$, $|x_1+\cdots+x_{n-1}|<a$

进而可求出$\max|v_i|$的分布密度，并可求出其期望与标准差，以供实际应用。

第六节　两组测量的分布

若测量值独立服从$N(\mu,\sigma^2)$，当测得两组值分别为

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n_1}$$

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n_2}$$

则

$$t=(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{(n_1+n_2)(n_1s_1^2+n_2s_2^2)}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中

$$\bar{x}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}x_i,\quad s_1^2=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2$$

为第一组统计量，而$\bar{y}$及s_2^2是第二组相应统计量。

下面作一证明。

无妨于证明，可设$\mu=0$。用正交变换将两组全变为z_1，$\cdots$，$z_{n_1+n_2}$，而

$$z_1=\sqrt{n_1}\,\bar{x},\quad z_2=\sqrt{n_2}\,\bar{y}$$

则二次型

$$Q=n_1s_1^2+n_2s_2^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n1}x_i^2+\sum_{i=1}^{n2}y_i^2-n_1\bar{x}^2-n_2\bar{y}^2$$

$$=\sum_{i=3}^{n_1+n_2}z_i^2$$

由上节费希尔引理，知$\frac{Q}{\sigma^2}$服从自由度为n_1+n_2-2的χ^2分布，于是

$$t=\frac{z_1\sqrt{\frac{n_2}{n_1+n_2}}-z_2\sqrt{\frac{n_1}{n_1+n_2}}}{\sqrt{\frac{1}{n_1+n_2-2}\sum_{i=3}^{n_1+n_2}z_i^2}}=\frac{w}{\sqrt{\frac{1}{n_1+n_2-2}\sum_{i=3}^{n_1+n_2}z_i^2}}$$

其中w及z_3，…，$z_{n_1+n_2}\sim N(0,\sigma^2)$独立，得证。

利用这一原理可以发现两组测量值间是否存在系统误差。即根据实测值按统计计算所得t与按附表3所查得t分布临界值t_α比较，若$|t|<t_\alpha$，则无根据怀疑两组间有系统误差。

例　对某量测得两组值为

x_i: 1.9, 0.8, 1.1, 0.1, −0.1, 4.4, 5.5, 1.6, 4.6, 3.4

y_i: 0.7, −1.6, −0.2, −1.2, −0.1, 3.4, 3.7, 0.8, 0.0, 2.0

今算得

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\Sigma x_i=2.33,\quad \bar{y}=\frac{1}{10}\Sigma y_i=0.75$$

$$s_1^2=\frac{1}{10}\Sigma(x_i-\bar{x})^2=3.61,\quad s_2^2=\frac{1}{10}\Sigma(y_i-\bar{y})^2=2.89$$

$$t=(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{\frac{10\times10\times(10+10-2)}{(10+10)(10s_1^2+10s_2^2)}}=1.86$$

由附表 3 查得当$\nu=10+10-2, \alpha=0.05$时$t_\alpha=2.10$，今$|t|=1.86<2.10=t_\alpha$，故两組间无根据怀疑有系统误差。

第七节　多维正态随机向量有关分布

一、条件分布

若$\xi=(\xi_1,\cdot,\xi_r,\xi_{r+1},\cdot,\xi_n)'$密度为$f(x_1\cdot, x_r, x_{r+1}\cdot, x_n)$，则在$\xi_{r+1}=x_{r+1},\cdot,\xi_n=x_n$条件下，$\xi_{(1)}=(\xi_1,\cdot,\xi_r)'$条件密度

$$f(x_1,\cdot,x_r|x_{r+1},\cdot,x_n)=\frac{f(x_1,\cdot,x_r,x_{r+1},x_n)}{f_{(2)}(x_{r+1},\cdot,x_n)}$$

其中

$$f_{(2)}(x_{r+1},\cdot,x_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\cdot,x_r,x_{r+1},\cdot,x_n)\,dx_1\cdot dx_r$$

为$\xi_{(2)}=(\xi_{r+1},\cdot,\xi_n)'$边缘分布密度。

性质　若$\xi=\begin{pmatrix}\xi_{(1)}\\ \xi_{(2)}\end{pmatrix}\sim N_n(\mu, \Sigma)$，其中$\xi_{(1)}$，$\xi_{(2)}$行数为$r$，$n-r$，而$\Sigma_{11}$，$\Sigma_{12}$，$\Sigma_{22}$为$\Sigma$相应分块，则$\xi_{(1)}$给定后，$\xi_{(2)}$条件分布为

$$\xi_{(2)}\sim N_{n-r}\left(\mu_{(2)}+\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}(\xi_{(1)}-\mu_{(1)}),\ \Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}\Sigma_{12}\right) \tag{8.26}$$

其中$\mu_{(i)}=E\xi_{(i)}, i=1, 2$，而$\Sigma^-$为$\Sigma$的自反广逆。

证　此处及以后引入符号$\triangleq$，它表示$\triangleq$左边内容由$\triangleq$右边记号表示，也解释为定义[10]。

用$M(A)$表A的列向量张成的空间。因对向量L，$L\perp M(\Sigma_{11})\Rightarrow L\perp M(\Sigma_{12})$，故$M^{\perp}(\Sigma_{11})\subset M^{\perp}(\Sigma_{12})$。$M(\Sigma_{12})\subset M(\Sigma_{11})$，故有$B$使$\Sigma_{12}=\Sigma_{11}B'$，而$\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}\Sigma_{11}=B\Sigma_{11}\Sigma_{11}^{-}\Sigma_{11}=B\Sigma_{11}=\Sigma_{21}$，因

$$\mathrm{cov}(\xi_{(2)}-\mu_{(2)}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}(\xi_{(1)}-\mu_{(1)}),\ \xi_{(1)}-\mu_{(1)})=\Sigma_{21}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}\Sigma_{11}=0$$

故正态向量$\xi_{(1)}-\mu_{(1)}$，$\xi_{(2)}-\mu_{(2)}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}(\xi_{(1)}-\mu_{(1)})$独立，又

$$V(\xi_{(2)}-\mu_{(2)}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}(\xi_{(1)}-\mu_{(1)}))=\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}\Sigma_{12}\triangleq\Sigma_{22.1}$$

而

$$\xi_{(2)}-\mu_{(2)}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}(\xi_{(1)}-\mu_{(1)})\sim N_{n-r}(0,\ \Sigma_{22.1})$$

由于左端与$\xi_{(1)}$独立，故在给定$\xi_{(1)}$条件下

$$\xi_{(2)}\sim N_{n-r}(\mu_{(2)}+\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}(\xi_{(1)}-\mu_{(1)}),\ \Sigma_{22.1})$$

系　若　$y_{(2)}=\xi_n$为ξ的最后一个分量，则

$$E(y_n|\xi_{(1)})=\mu_n+\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-}(\xi_{(1)}-\mu_{(1)}) \tag{8.27}$$

此时，若Σ_{11}为非异方阵，则还有条件方差

$$\Sigma_{22.1}=\frac{|\Sigma|}{|\Sigma_{11}|}=\frac{1}{\sigma^{nn}} \tag{8.28}$$

其中σ^{nn}为Σ^{-1}的第n个主对角元素。

证　因对任何对称阵A，若分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}' & A_{22}\end{pmatrix} \tag{8.29}$$

则当A_{11}为非异方阵，作

$$B=\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}$$

因

$$BAB'=\begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

则有

$$|A|=|BAB'|=|A_{11}|\,|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| \tag{8.30}$$

同样当A_{22}为非异方阵；则有

$$|A|=|A_{22}|\,|A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}| \tag{8.31}$$

又对任何矩阵 $\underset{pp}{D}$，将其按$(p-1)\times(p-1)$阶主要主子块

D_{11}与最后一主对角元素d_{pp}分块为

$$D=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & d_{pp} \end{pmatrix} \tag{8.32}$$

当D为非异方阵时

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}\begin{pmatrix} \cdot & \\ \cdot & |D_{11}| \end{pmatrix}$$

故D^{-1}的最后一主对角元素

$$d^{pp}=\frac{1}{|D|}|D_{11}| \tag{8.33}$$

将(8.30)，(8.33)用于本系证明，因

$$\Sigma_{22.1}=\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$$

因$\Sigma_{22.1}$为一个数，故

$$\Sigma_{22.1}=\frac{|\Sigma|}{|\Sigma_{11}|}=\frac{1}{\sigma^{nn}}$$

其中σ^{nn}为Σ^{-1}的n个主对角元素，得证系。

二、χ^2 分 布

由第三章第四节 χ^2分布定义，我们知道，若 $\xi_i \sim N(0,1)$独立，则 $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \xi_i^2 \sim \chi^2(\nu)$，即当 $\underset{\nu 1}{\xi} \sim \underset{\nu}{N}(0, I)$，则 $\xi'\xi \sim \chi^2(\nu)$。显然，若$\xi \sim N_\nu(0, \sigma^2 I)$，则$\frac{1}{\sigma^2}\xi'\xi \sim \chi^2(\nu)$，若 ξ 的方差阵不为对角阵，即其各分量有关时，如何导出χ^2分布呢？我们有

性质 若 $\eta \sim N_n(\mu, \Sigma)$且 $\Sigma > 0$，则

$$Q = (\eta - \mu)' \Sigma^{-1} (\eta - \mu) \sim \chi^2(n) \tag{8.34}$$

证 因$\Sigma > 0$，故有非异方阵 C使$C\Sigma C' = I$，或$\Sigma = C^{-1}(C')^{-1}$，作

$$\xi = C(\eta - \mu) \sim N_n(0, C\Sigma C') = N_n(0, I)$$

于是

$$\begin{aligned} Q &= (\eta - \mu)' \Sigma^{-1} (\eta - \mu) \\ &= (\eta - \mu)' C' C (\eta - \mu) \\ &= \xi' \xi \end{aligned}$$

因$\xi \sim N_n(0, I)$ 故 $Q = \xi'\xi \sim \chi^2(n)$，得证。

第八节 非正态分布时t分布的计算

我们在第五节曾证明，若$x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$独立，则

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum (x_i - \bar{x})^2}} \sim t(n-1)$$

若测量值 x_i 不服从正态分布，则左端所服从的分布将与t分

布有差异，我们现来研究它[1]。

设 $E(x_i)=\mu$，$\sigma(x_i)=\sigma$，因

$$T=\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}}=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$$

$$\bigg/\sqrt{\Sigma\left(\frac{x_i-\mu-(\bar{x}-\mu)}{\sigma}\right)^2\bigg/(n(n-1))}$$

与x_i平移与σ大小无关，故只研究$E(x_i)=0$，$\sigma(x_i)=1$情况。

由第六章第三节，将x_i所服从分布之密度按(6.2)展为$N(0, 1)$密度$\varphi(x)$及其导数构成之级数

$$f(x)=\varphi(x)-\frac{1}{3!}\gamma_1\varphi^{(3)}(x)+\frac{1}{4!}\gamma_2\varphi^{(4)}(x)+\frac{10}{6!}\gamma_1^2\varphi^{(6)}(x)$$

其中γ_1，γ_2为x之偏倚系数与超越系数。

首先考虑简化情况

$$f(x)=\varphi(x)-\frac{1}{3!}\gamma_1\varphi^{(3)}(x)$$

此时

$$f(x)=\varphi(x)\left\{1+\frac{\gamma_1}{3!}(x^3-3x)\right\}$$

不计高次项，而x_1，…，x_n联合密度

$$\Pi f(x_i)=\Pi\varphi(x_i)+\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\frac{\gamma_1}{6}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^3\right.$$

$$\left.-3\sum_{i=1}^{n}x_i\right)e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$$

$$\triangleq\Pi\varphi(x_i)+\Delta\Pi_1(x_i)$$

作赫尔默特变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1\times 2}} & \frac{-1}{\sqrt{1\times 2}} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\times 3}} & \frac{1}{\sqrt{2\times 3}} & \frac{-2}{\sqrt{2\times 3}} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \cdot & \frac{-(n-1)}{\sqrt{(n-1)n}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdot & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

即 $Y=HX$

而H为正交阵。

因

$$\Sigma x_i^3 = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i-1}{\sqrt{i(i+1)}} y_i^3 + \frac{y_n^3}{\sqrt{n}} + 3\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1} \frac{y_i^2 y_{i+j}}{\sqrt{(i+j)(i+j+1)}} + \frac{3y_n}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

$$\Sigma x_i = \sqrt{n}\, y_n$$

$$\Sigma x_i^2 = y_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

$$\Pi dx_i = dy_n \prod_{i=1}^{n-1} dy_i$$

作变换$(y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n) \to (T,\ \rho,\ \phi_0,\ \phi_1,\ \cdots, \phi_{n-3})$而

$$y_1 = \rho \sin\phi_{n-3} \sin\phi_{n-4} \cdots \sin\phi_2 \sin\phi_1 \sin\phi_0$$

$$y_2 = \rho \sin\phi_{n-3} \sin\phi_{n-4} \cdots \sin\phi_2 \sin\phi_1 \cos\phi_0$$

$$y_3 = \rho \sin\phi_{n-3} \sin\phi_{n-4} \cdots \sin\phi_2 \cos\phi_1$$

$$\cdots$$

$$y_{n-1} = \rho \cos\phi_{n-3}$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \rho T$$

且$\phi_0 \in [0,\ 2\pi]$，当$i > 0$时$\phi_i \in [0,\ \pi]$。于是

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = \rho^2$$

$$\Sigma x_i^2 = y_n^2 + \rho^2 = \left(1 + \frac{T^2}{n-1}\right) \rho^2$$

变换雅可比

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial \phi_0} & \dfrac{\partial y_1}{\partial \phi} & \cdot & 0 \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial \phi_0} & \dfrac{\partial y_2}{\partial \phi_1} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \dfrac{\rho}{\sqrt{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{n-1}}\sin^{n-3}\phi_{n-3}\sin^{n-4}\phi_{n-4}\cdots\sin^2\phi_2\sin\phi_1$$

因

$$\int_0^{\pi} d\phi_{n-3}\cdots\int_0^{\pi} d\phi_1\int_0^{2\pi}|J|\,d\phi_0=\frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{n-1}}2\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

并注意

$$\int_0^{\infty}\rho^{n-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(1+\frac{T^2}{n}\right)\rho^2\right)d\rho=2^{\frac{n-2}{2}}\left(1+\frac{T^2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

将$(\Delta\prod f(x_i))dx_1\cdots dx_n$对各$\phi_i$及$\rho$积分得

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{\gamma_1}{6\sqrt{n}}\pi^{\frac{n-3}{2}}\frac{2\pi dT}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\left(-\frac{T^3\rho^3}{(n-1)^2}+\frac{3T\rho^3}{n-1}\right.$$

$$\left.-\frac{3nT\rho}{n-1}\right)\rho^{n-1}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)\right)d\rho$$

$$=\frac{\gamma_1}{6(n-1)\sqrt{2n\pi}}\left\{3(n-1)-T^2(2n-1)\right\}\frac{TdT}{\left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)^{(n+3)/2}}$$

又$\prod\varphi(x_i)$变换后为正态分布情况下t分布密度，故得T之密度为

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$+\gamma_1\frac{\{3(n-1)T-(2n-1)T^3\}}{6(n-1)\sqrt{2n\pi}\left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)^{\frac{n+3}{2}}}$$

若取

$$f(x)=\varphi(x)-\frac{1}{3!}\gamma_1\varphi^{(3)}(x)+\frac{1}{4!}\gamma_2\varphi^{(4)}(x)+\frac{10}{6!}\gamma_1^2\varphi^{(6)}(x)$$

则T之密度

$$q(T)=p_0(T)+\gamma_1 p_{\gamma_1}(T)-\gamma_2 p_{\gamma_2}(T)+\gamma_1^2 p_{\gamma_1^2}(T)$$

其中

$$p_0(T)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$p_{\gamma_1}(T)=\frac{3(n-1)T-(2n-1)T^3}{6(n-1)\sqrt{2n\pi}\left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)^{\frac{n+3}{2}}}$$

$$p_{\gamma_2}(T)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{24n\sqrt{\pi(n-1)}\ \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$

$$\cdot\frac{\{3(n-1)-6(n+1)T^2+(n+1)T^4\}}{\left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)^{\frac{n+4}{2}}}$$

$$p_{\gamma_1^2}(T)=\{3(n-1)^2(2n+11)-9(n-1)(n+3)(2n-1)T^2$$
$$-3(n+1)(n+3)(2n+13)T^4+(n+1)(n+3)(2n+3)T^6\}$$
$$\cdot\ \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\Big/\left\{144n(n-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)^{\frac{n+6}{2}}\Gamma\left(\frac{n+5}{2}\right)\right\}$$

为计算临界值，需算T取T_p时的

$$F(-T_p)=\int_{-\infty}^{-T_p}q(T)dT$$
$$=F_0(-T_p)+\gamma_1 F_{\gamma_1}(-T_p)-\gamma_2 F_{\gamma_2}(-T_p)+\gamma_1^2 F_{\gamma_1^2}(-T_p)$$

而

$$F_0(-T_p)=\int_{-\infty}^{-T_p}p_0(T)dT=\int_{T_p}^{\infty}p_0(T)dT$$
$$=\frac{1}{2}I_{u_0}\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

因$p_0(T)$为正态分布时t分布密度，故$F_0(-T_p)$可由t分布表查出。

又

$$F_{\gamma_1}(-T_p)=\int_{-\infty}^{-T_p} p_{\gamma_1}(T)\,dT=-\int_{T_p}^{\infty} p_{\gamma_1}(T)\,dT$$

$$=\frac{2n-1}{6\sqrt{2n\pi}}I_{u_0}\left(\frac{n-1}{2},1\right)-\frac{n-1}{3\sqrt{2n\pi}}I_{u_0}\left(\frac{n+1}{2},1\right)$$

$$F_{\gamma_2}(-T_p)=\int_{-\infty}^{-T_p} p_{\gamma_2}(T)\,dT=\int_{T_p}^{\infty} p_{\gamma_2}(T)\,dT$$

$$=\frac{n-1}{24}I_{u_0}\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)-\frac{(n-1)(n+2)}{12n}I_{u_0}\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{(n+4)(n-1)}{24n}I_{u_0}\left(\frac{n+3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$F_{\gamma_1^2}(-T_p)=\int_{-\infty}^{-T_p} p_{\gamma_1^2}(T)\,dT=\int_{T_p}^{\infty} p_{\gamma_1^2}(T)\,dT$$

$$=\frac{(n-1)(2n+5)}{72}I_{u_0}\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)-\frac{(n-1)(2n^2+5n+8)}{24n}$$

$$\cdot I_{u_0}\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)+\frac{(n-1)(2n^2+5n+12)}{24n}I_{u_0}\left(\frac{n+3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{(n-1)(2n^2+5n+12)}{72n}I_{u_0}\left(\frac{n+5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

其中I为不完全B函数

$$I_x(a,b)=\frac{1}{B(a,\ b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

而以上各式中

$$u_0=1\Big/\left(1+\frac{T_p^2}{n-1}\right)$$

在测量工作中，常出现的非正态分布有反正弦分布

($\gamma_2=-1.5$)，均匀分布($\gamma_2=-1.2$)，三角分布($\gamma_2=-0.6$)，这三种分布都是对称分布，它们的$\gamma_1=0$，从而

$$F(-T_p)=F_0(-T_p)-\gamma_2F_{\gamma_2}(-T_p)$$

从而$F(-T_p)$可按下式算出

$$F(-T_p)=\frac{1}{2}I_{u0}\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)-\gamma_2\left\{\frac{n-1}{24}I_{u0}\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\right.$$

$$-\frac{(n-1)(n+2)}{12n}I_{u0}\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)+\frac{(n+4)(n-1)}{24n}$$

$$\left.\cdot I_{u0}\left(\frac{n+3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=S_{n-1}(-T_p)-\gamma_2\left\{\frac{n-1}{12}S_{n-1}(-T_p)-\frac{(n-1)(n+2)}{6n}\right.$$

$$\left.\cdot S_{n+1}\left(-T_p\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)+\frac{(n+4)(n-1)}{12n}S_{n+3}\left(-T_p\sqrt{\frac{n+3}{n-1}}\right)\right\}$$

其中$S_\nu(x)$为自由度为ν的正态分布的t分布的分布函数在x处之值。

分别取$P=0.95$，0.99，0.9973可得$F(-T_p)=\frac{1}{2}(1-0.95)$，$\frac{1}{2}(1-0.99)$，$\frac{1}{2}(1-0.9973)$，从而得出对应于不同分布之$T_p$，如表8.2。

于是，已知x_i取不同分布时，以一定置信概率，$\bar{x}-\mu$落入

$$\pm\Delta=\pm T_p\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

即Δ为$\bar{x}$的极限误差。

例 某测量误差服从三角分布，今测得某量5次，分别为

$x_1 = 29.18$

$x_2 = 29.14$

$x_3 = 29.27$

$x_4 = 29.25$

$x_5 = 29.26$

于是

$$\bar{x} = 29.24$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{0.035}{\sqrt{5}} = 0.016$$

而$\bar{x}$的极限误差

$$\Delta = T_p(n-1) \times \sigma_{\bar{x}}$$

$$= T_{0.9973}(4) \times \sigma_{\bar{x}}$$

$$= 6.9 \times 0.016 = 0.11$$

表8.2 非正态分布t值T表

p	反正弦分布			均匀分布			三角分布		
n−1	0.95	0.99	0.9973	0.95	0.99	0.9973	0.95	0.99	0.9973
1	14.3	71.5	265.0	14.0	70.1	259.1	13.4	66.8	247.6
2	4.8	11.1	21.4	4.6	10.9	21.1	4.7	10.4	20.2
3	3.4	6.4	10.1	3.4	6.3	10.0	3.3	6.1	9.7
4	3.0	5.0	7.8	2.9	4.9	7.2	2.9	4.8	6.9
5	2.7	4.4	6.0	2.7	4.3	5.9	2.6	4.2	5.8
6	2.6	4.0	5.3	2.5	3.9	5.2	2.5	3.8	5.1
7	2.4	3.7	4.9	2.4	3.7	4.8	2.4	3.6	4.7
8	2.4	3.5	4.6	2.4	3.5	4.5	2.4	3.4	4.4
9	2.3	3.5	4.3	2.3	3.5	4.3	2.3	3.4	4.2
10	2.3	3.3	4.2	2.3	3.3	4.2	2.3	3.2	4.1
12	2.3	3.2	4.0	2.3	3.2	4.0	2.2	3.1	3.9
24	2.1	2.9	3.5	2.1	2.9	3.5	2.1	2.9	3.4
∞	2.0	2.6	3.0	2.0	2.6	3.0	2.0	2.6	3.0

第九章　估计检验与多组测量误差分析

第一节　估计概念

设$F(x; \theta)$为总体的分布函数，其中θ为参数。从总体中取出一个样本$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，现在要构造样本的函数$\hat{\theta}(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$去估计$\theta$，我们称$\hat{\theta}$为参数$\theta$的估计量，这种估计称为参数的点估计，也可构造样本的两个函数$\hat{\theta}_1(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$和$\hat{\theta}_2(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$(\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2)$，用区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$作为$\theta$可能取值的一种估计，这种估计称为参数的区间估计。

一、求估计量的方法

1. 矩法

由于样本来自总体，因此可用样本矩作为相应总体矩的估计。

如期望是一阶原点矩，其估计可用

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\Sigma\xi_i$$

方差是二阶中心矩，其估计可用

$$s_1^2 = \frac{1}{n}\Sigma(\xi_i - \bar{\xi})^2$$

二维总体相关系数可估计为

$$r=\frac{\Sigma(\xi_i-\bar{\xi})(\eta-\bar{\eta})}{\sqrt{\Sigma(\xi_i-\bar{\xi})^2\cdot\Sigma(\eta_i-\bar{\eta})^2}}$$

2、 **最大似然法**

设总体ξ的密度为$f(x;\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_k)$，其中$\theta_j(1\leqslant j\leqslant k)$为待估计的参数，又设$\xi_1,\ \cdots,\xi_n$为$\xi$的几个独立测量值，则$(\xi_1\cdots,\ \xi_n)$的密度为

$$L=\prod_i f(x_i;\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_k)$$

并称它为样本$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的似然函数。

最大似然法是提供下列准则来确定$\theta_1,\ \cdots,\ \theta_k$，使其估计值$\hat{\theta}_1,\ \cdots,\ \hat{\theta}_k$满足

$$L=\prod f(x_i;\ \hat{\theta}_1,\ \cdots,\ \hat{\theta}_k)=\max \tag{9.1}$$

例 若对某量等精度独立测得为$x_1,\ \cdots,\ x_n$，若测量值服从正态分布$N(\mu,\ \sigma^2)$，则

$$L=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\Big((x_1-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2\Big)\right\}$$

$$L=\max\Rightarrow(x_1-\hat{\mu})^2+\cdots+(x_n-\hat{\mu})^2=\min$$

从而得到μ的估计

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\Sigma x_i$$

二、估计标准

从直观上讲，我们希望所作估计量在所估计的参数附近摆动，即对任何n与θ，参数θ估计量$\hat{\theta}_n(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)$的期望等于$\theta$，即

$$E\hat{\theta}_n=\theta \tag{9.2}$$

满足这一要求的估计量称无偏估计量，否则称有偏估计量。

我们希望当样本容量 n 增加时，估计量会愈来愈靠近被估计的参数，即

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n-\theta|>\varepsilon\}=0 \tag{9.3}$$

满足这一要求的估计量称一致（相容）估计量。

若$\hat{\theta}_n$和$\hat{\theta}'_n$都是 θ 的无偏估计量，且对任何 n，成立

$$V\hat{\theta}_n<V\hat{\theta}'_n \tag{9.4}$$

则称估计量$\hat{\theta}_n$较$\hat{\theta}'_n$有效。

第二节　标准差的估计

一、贝塞尔（Bessel）法

若在同一条件下对某量 μ 作多次独立测量，得 x_1，x_2，…，x_n，则由矩法，一次测量的方差σ^2估计为

$$s_1^2=\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})^2$$

因

$$Es_1^2=\frac{1}{n}E\{\Sigma(x_i-\mu)^2-n(\bar{x}-\mu)^2\}$$

$$=\frac{1}{n}n\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

故s_1^2为σ^2的有偏估计。而

$$\hat{\sigma}^2=\frac{n}{n-1}s_1^2=\frac{1}{n-1}\Sigma(x_i-\bar{x})^2$$

为σ^2的无偏估计。于是我们得到残差

$$v_i=x_i-\bar{x}$$

计算一次测量标准差的贝塞尔公式

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma v_i^2} \tag{9.5}$$

当x_i iid $N(\mu,\ \sigma^2)$即$x_1,\ x_2\cdots,\ x_n$为独立同分布$N(\mu,\sigma^2)$变量，由第八章第五节知

$$\frac{1}{\sigma^2}\Sigma v_i^2\sim\chi^2(n-1)$$

我们由第三章第三节可以得出$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma v^2}$的密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\sigma^{n-1}\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}x^{n-2}e^{-\frac{(n-1)}{2\sigma^2}x^2}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

于是

$$E\widehat{\sigma^2}=\sigma^2$$

$$E\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\sqrt{n-1}\,\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}\sigma=M_n\sigma$$

故$\widehat{\sigma^2}$是σ^2的无偏估计，但$\hat{\sigma}$不是σ的无偏估计，即用$\hat{\sigma}$来估计σ时存在系统误差

$$M_n\sigma-\sigma=(M_n-1)\sigma=\xi_n\sigma$$

再看$\hat{\sigma}$的偶然误差标准差$\sigma(\hat{\sigma})$，因

$$\sigma^2(\hat{\sigma})=E(\hat{\sigma}^2)-(E\hat{\sigma})^2=\sigma^2-M_n^2\sigma^2$$

故

$$\sigma(\hat{\sigma})=\sqrt{1-M_n^2}\,\sigma$$

将系统误差与偶然误差标准差合成得综合标准差

$$U=|\xi_n\sigma|+\sigma(\hat{\sigma})$$
$$=(-\xi_n+\sqrt{1-M_n^2})\sigma$$
$$=u_n\sigma$$

上述ξ_n，$\sqrt{1-M_n^2}$，u_n值如表9.1。

表9.1　贝塞尔法表

n	ξ_n	$\sqrt{1-M_n^2}$	u_n
2	−0.20	0.60	0.80
3	−0.11	0.46	0.57
4	−0.08	0.39	0.47
5	−0.06	0.34	0.40
6	−0.05	0.31	0.36
7	−0.04	0.28	0.32
8	−0.04	0.26	0.30
9	−0.03	0.25	0.28
10	−0.03	0.23	0.26
20	−0.01	0.16	0.17
30	−0.01	0.13	0.14
40	−0.01	0.11	0.12
50	−0.01	0.10	0.11

例　对某物理量测9次，得

x_i	v_i
1258	15
1258	15
1253	10
1252	9
1252	9
1256	13
1189	−54

1240	−3
1225	−18

则

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i=\frac{1}{9}\Sigma x_i=1243$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma v_i^2}=22$$

二、彼得（Петерс）法

若在同一条件下对某量μ作多次独立测量，得x_1，x_2，…，x_n，作样本平均误差

$$\vartheta=\frac{1}{n}\Sigma|x_i-\bar{x}|=\frac{1}{n}\Sigma|v_i|$$

当x_i iid $N(\mu,\ \sigma^2)$，可算出[14]

$$E\vartheta=\sigma\left\{\frac{2(n-1)}{n\pi}\right\}^{1/2}$$

于是可以用

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\Sigma|v_i| \tag{9.6}$$

作为σ的无偏估计，上式即为彼得公式。

用彼得公式估计σ时的标准差

$$\sigma(\hat{\sigma})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}+\sqrt{n(n-2)}-n+\arcsin\frac{1}{n-1}}$$

$$=c_n\sigma$$

c_n之值见表9.2，实用上彼得公式近似取为

$$\hat{\sigma}=1.253\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\Sigma|v_i|$$

$$=\frac{1.253}{n-\frac{1}{2}}\Sigma|v_i|$$

表 9.2 彼得法表

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	60	∞
C_n	0.75	0.52	0.43	0.37	0.33	0.31	0.28	0.27	0.25	0.17	0.14	0.10	0

例 同贝塞尔法中例，此时

$$\hat{\sigma}=1.253\frac{1}{\sqrt{9(9-1)}}146=22$$

三、最大残差法

若在同一条件下对某量 μ 作多次独立测量，得 x_1，x_2，…，x_n. 算出残差

$$v_i=x_i-\frac{1}{n}\Sigma x_i$$

若 x_i iid $N(\mu,\ \sigma^2)$，可由第八章第五节最大残差分布求出 $\max|v_i|$ 的期望与σ的关系[16]

$$E\max=k_n'\sigma$$

于是一次测量的

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{k_n'}\max|v_i| \tag{9.7}$$

它是 σ 的无偏估计，它算 σ 时的标准差

$$U=\frac{r_n'}{k_n'}\sigma$$

$\frac{1}{k_n'}$ 与 $\frac{r_n'}{k_n'}$ 之值见表9.3 .

表9.3　最大残差法表

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
$\frac{1}{k_n'}$	1.77	1.02	0.83	0.74	0.68	0.64	0.61	0.59	0.57	0.51	0.48	0.46	0.44
$\frac{r_n'}{k_n'}$	0.76	0.52	0.43	0.37	0.34	0.32	0.30	0.28	0.27	0.23	0.21	0.19	0.18

例　对某量测 4 次，得

$$1.70,\ 1.57,\ 1.37,\ 1.71$$

则 $\bar{x}=1.59$，因 $\max|v_i|=0.22$，故

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{k_4'}\max|v_i|=0.83\times0.22=0.18$$

四、极 差 法

若多次对某量测得$x_1,x_2,,\cdots,x_n$，且x_i *iid* $N(\mu,\ \sigma^2)$，则在其中选出最大值x_i与最小值 x_i，计算它们的差即得极差

$$w_n=\max x_i-\min x_i$$

由第八章第五节中极差的分布，可求出w_n的期望

$$Ew_n=d_n\sigma$$

于是一次测量的[16][17]

$$\hat{\sigma}=\frac{w_n}{d_n} \tag{9.8}$$

它是σ的无偏估计，由它算σ时的标准差

$$U=c_n\sigma$$

d_n及 c_n之值见表9.4。

例　对某量测得

$$1.70,\ 1.57,\ 1.37,\ 1.71$$

因$w_4=1.71-1.37=0.34$，故

$$\hat{\sigma}=\frac{w_4}{d_4}=\frac{0.34}{2.06}=0.17$$

表9.4　极差法表

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_n	1.13	1.69	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	2.97	3.08
C_n	0.76	0.52	0.43	0.37	0.34	0.31	0.29	0.27	0.26

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d_n	3.17	3.26	3.34	3.41	3.47	3.53	3.59	3.64	3.69	3.73
C_n	0.25	0.24	0.23	0.22	0.22	0.21	0.21	0.20	0.20	0.20

五、最大误差法

有时，我们可以知道某量的真值，如两次测量同一量之差真值为0等，这时，我们可以算出误差δ_i，在多次测量后，取出$\max|\delta_i|$，当各测量值$x_i \underset{\sim}{iid} N(\mu,\ \sigma^2)$，则$|\delta_i|$服从绝对正态分布，而$\max|\delta_i|$的分布密度

$$f(a)=\frac{d}{da}\Pi P(|\delta_i|<a)$$

$$=\begin{cases} n\left(\int_0^a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\right)^{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\sigma}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, & a>0 \\ 0, & a\leqslant 0 \end{cases}$$

于是可求出[18]

$$E\max|\delta_i|=k_n''\sigma$$

于是一次测量的标准差

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{k_n''}\max|\delta_i| \tag{9.9}$$

$\frac{1}{k_n''}$之值如表9.5，$\frac{1}{k_n''}\max|\delta_i|$是$\sigma$的无偏估计，它算$\sigma$时的标准差

$$U=\frac{r_n''}{k_n''}\sigma$$

$\frac{r_n''}{k_n''}$的值如表9.6。

表9.5 最大误差法系数表

n	$\frac{1}{k_n''}$	n	$\frac{1}{k_n''}$	n	$\frac{1}{k_n''}$
1	1.25	11	0.52	21	0.46
2	0.88	12	0.51	22	0.45
3	0.75	13	0.50	23	0.45
4	0.68	14	0.50	24	0.45
5	0.64	15	0.49	25	0.44
6	0.61	16	0.48	26	0.44
7	0.58	17	0.48	27	0.44
8	0.56	18	0.47	28	0.44
9	0.55	19	0.47	29	0.43
10	0.53	20	0.46	30	0.43

表9.6 最大误差法精度表

n	1	2	5	7	10	20	30
r_n''/k_n''	0.75	0.51	0.36	0.31	0.27	0.23	0.20

例 在30t处用检衡车检轨道衡10次，读数为

30t−2kg	30t−5kg
+0	+ 0
+0	+10
+5	−15
−10	+15

因检衡车30 t是高精度测得的，可视作真值，于是上述读数与30 t之差为真误差δ_i，而

$$\max|\delta_i| = 15\text{kg}$$

而 $$\hat{\sigma} = \frac{1}{k_{10}''}\max|\delta_i| = 0.53\times 15 = 8.0\text{kg}$$

第三节　假设检验概念

根据问题的要求，提出对总体性质的某种假设H_0，为判断其是否成立，可由检验问题本身作出统计量f并确定其分布，规定一个显著性水平α（如0.05），再求出在H_0成立的条件上，能使

$$P(|f| > f_0) = \alpha$$

成立的临界值f_0。

从所考虑地总体中抽取n个测量数据的样本，并由这组测量数据算出f的测量值f^*，如$|f^*|\geqslant f_0$，则由小概率原理，拒绝假设H_0，反之，如$|f^*|<f$，则可对假设H_0不拒绝。

临界值也可规定为f的上限f_{10}及下限f_{20}，当下限为$-\infty$时，实际上只规定上限；当上限为$+\infty$时，实际上只规定下限。

如第八章第六节两组测量的分布中，为检验两组测量结

果x_i, y_i间是否存在系统误差，作统计量

$$t=(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{(n_1+n_2)(n_1s_1^2+n_2s_2^2)}}$$

当无系统误差时，$t\sim t(n_1+n_2-2)$，由t分布表附表3查出满足

$$P(|t(n_1+n_2-2)|<t_\alpha)=\alpha$$

之t_α，若统计量$|t|<t_\alpha$，则不拒绝无系统误差的假设。

第四节　分布检验

我们常须考虑测量值服从何种分布，此时可作分布的假设检验。该检验的思想是，由理论的研究或过去同类测量的经验，可认为测量值服从某一分布，按以下方法作检验，以拒绝或不拒绝该分布。

一、夏皮罗-威尔克（Shapiro-Wilk）法

此法用以检验测量值是否服从正态分布，其步骤为[19][20]

1. 将独立测量值x_i从小到大排成顺序量

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$$

2. 由夏皮罗-威尔克的a_{in}系数表9.7查出a_{in}
3. 计算

$$W=\left\{\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_{in}(x_{(n-i+1)}-x_{(i)})\right\}^2\Big/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \qquad (9.10)$$

4. 给定显著性水平α，查$W(n,\alpha)$表9.8，
5. 若$W<W(n,\alpha)$，拒绝正态性假设，否则不拒绝。

例 今将某量独立测得结果按大小排成顺序量

108, 109, 110, 110, 110, 112, 112, 116, 119, 124

因本例$n=10$，由表9.7查出

$a_{1,10}=0.5739$，$a_{2,10}=0.3291$，$a_{3,10}=0.2141$

$a_{4,10}=0.1224$，$a_{5,10}=0.0399$

算出

$$\begin{aligned}&\Sigma a_{in}(x_{(n-i+1)}-x_{(i)})\\&=0.5739(x_{(10)}-x_{(1)})+0.3291(x_{(9)}-x_{(2)})\\&\quad+0.2141(x_{(8)}-x_{(3)})+0.1224(x_{(7)}-x_{(4)})\\&\quad+0.0399(x_{(6)}-x_{(5)})\\&=14.0826\end{aligned}$$

$$\Sigma(x_i-\bar{x})^2=236$$

$$W=\frac{14.0826^2}{236}=0.840$$

取$\alpha=0.05$，由表9.8查出$W(10,\ 0.05)=0.842$，今

$$W=0.840<W(n,\ \alpha)$$

故拒绝正态性假设。

本法适于测量次数不多时的正态性检验，次数较多（如大于50）的正态性检验可用下面的达哥斯特法。

二、达哥斯特（D'Agostino）法

此法用以检验测量值是否服从正态分布，其步骤为[20]

1. 将独立测量值x_i排成顺序量

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$$

2. 计算

表 9.7 夏皮罗-威尔克α_{in}系数

i \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.7071	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739
2			0.1677	0.2413	0.2806	0.3031	0.3164	0.3244	0.3291
3					0.0875	0.1401	0.1743	0.1976	0.2141
4							0.0561	0.0947	0.1224
5									0.0399

i \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.5601	0.5475	0.5359	0.5251	0.5150	0.5056	0.4968	0.4886	0.4808	0.4734
2	0.3315	0.3325	0.3325	0.3318	0.3306	0.3290	0.3273	0.3253	0.3232	0.3211
3	0.2260	0.2347	0.2412	0.2460	0.2495	0.2521	0.2540	0.2553	0.2561	0.2565
4	0.1429	0.1586	0.1707	0.1802	0.1878	0.1939	0.1988	0.2027	0.2059	0.2085
5	0.0695	0.0922	0.1099	0.1240	0.1353	0.1447	0.1524	0.1587	0.1641	0.1686
6		0.0303	0.0539	0.0727	0.0880	0.1005	0.1109	0.1197	0.1271	0.1334
7				0.0240	0.0433	0.0593	0.0725	0.0837	0.0932	0.1013
8						0.0196	0.0359	0.0496	0.0612	0.0711
9								0.0163	0.0303	0.0422
10										0.0140

i \ n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0.4643	0.4590	0.4542	0.4493	0.4450	0.4407	0.4366	0.4328	0.4291	0.4254
2	0.3185	0.3156	0.3126	0.3098	0.3069	0.3043	0.3018	0.2992	0.2968	0.2944
3	0.2578	0.2571	0.2563	0.2554	0.2543	0.2533	0.2522	0.2510	0.2499	0.2487
4	0.2119	0.2131	0.2139	0.2145	0.2148	0.2151	0.2152	0.2151	0.2150	0.2148
5	0.1736	0.1764	0.1787	0.1807	0.1822	0.1836	0.1848	0.1857	0.1864	0.1870
6	0.1399	0.1443	0.1480	0.1512	0.1539	0.1563	0.1584	0.1601	б.1616	0.1630
7	0.1092	0.1150	0.1201	0.1245	0.1283	0.1316	0.1346	0.1372	0.1395	0.1415
8	0.0804	0.0878	0.0941	0.0997	0.1046	0.1089	0.1128	0.1162	0.1192	0.1219
9	0.0530	0.0618	0.0696	0.0764	0.0823	0.0876	0.0923	0.0965	0.1002	0.1036

（续表）

i \ n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
10	0.0263	0.0368	0.0459	0.0539	0.0610	0.0672	0.0728	0.0778	0.0822	0.0862
11		0.0122	0.0228	0.0321	0.0403	0.0476	0.0540	0.0598	0.0650	0.0697
12				0.0107	0.0200	0.0284	0.0358	0.0424	0.0483	0.0537
13						0.0094	0.0178	0.0253	0.0320	0.0381
14								0.0084	0.0159	0.0227
15										0.0076

i \ n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0.4220	0.4188	0.4156	0.4127	0.4096	0.4068	0.4040	0.4015	0.3989	0.3964
2	0.2921	0.2898	0.2876	0.2854	0.2834	0.2813	0.2794	0.2774	0.2755	0.2737
3	0.2475	0.2463	0.2451	0.2439	0.2427	0.2415	0.2403	0.2391	0.2380	0.2368
4	0.2145	0.2141	0.2137	0.2132	0.2127	0.2121	0.2116	0.2110	0.2104	0.2098
5	0.1874	0.1878	0.1880	0.1882	0.1883	0.1883	0.1883	0.1881	0.1880	0.1878
6	0.1641	0.1651	0.1660	0.1667	0.1673	0.1678	0.1683	0.1686	0.1689	0.1691
7	0.1433	0.1449	0.1463	0.1475	0.1487	0.1496	0.1505	0.1513	0.1520	0.1526
8	0.1243	0.1265	0.1284	0.1301	0.1317	0.1331	0.1344	0.1356	0.1366	0.1376
9	0.1066	0.1093	0.1118	0.1140	0.1160	0.1179	0.1196	0.1211	0.1225	0.1237
10	0.0899	0.0931	0.0961	0.0988	0.1013	0.1036	0.1056	0.1075	0.1092	0.1108
11	0.0739	0.0777	0.0812	0.0844	0.0873	0.0900	0.0924	0.0947	0.0967	0.0986
12	0.0585	0.0629	0.0669	0.0706	0.0739	0.0770	0.0798	0.0824	0.0848	0.0870
13	0.0435	0.0485	0.0530	0.0572	0.0610	0.0645	0.0677	0.0706	0.0733	0.0759
14	0.0289	0.0344	0.0395	0.0441	0.0484	0.0523	0.0599	0.0592	0.0622	0.0651
15	0.0144	0.0266	0.0262	0.0314	0.0361	0.0404	0.0444	0.0481	0.0515	0.0546
16		0.0068	0.0131	0.0187	0.0239	0.0287	0.0331	0.0372	0.0408	0.0444
17				0.0062	0.0119	0.0172	0.0220	0.0264	0.0305	0.0343
18						0.0057	0.0110	0.0158	0.0203	0.0244
19								0.0053	0.0101	0.0146
20										0.0049

(续表)

i \ n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0.3940	0.3917	0.3894	0.3872	0.3850	0.3830	0.3808	0.3789	0.3770	0.3751
2	0.2719	0.2701	0.2684	0.2667	0.2651	0.2635	0.2620	0.2604	0.2589	0.2574
3	0.2357	0.2345	0.2334	0.2323	0.2313	0.2302	0.2291	0.2281	0.2271	0.2260
4	0.2091	0.2085	0.2078	0.2072	0.2065	0.2058	0.2052	0.2045	0.2038	0.2032
5	0.1876	0.1874	0.1871	0.1868	0.1866	0.1862	0.1859	0.1855	0.1851	0.1847
6	0.1693	0.1694	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1693	0.1692	0.1691
7	0.1531	0.1535	0.1539	0.1542	0.1545	0.1548	0.1550	0.1551	0.1553	0.1554
8	0.1384	0.1392	0.1398	0.1405	0.1410	0.1415	0.1420	0.1423	0.1427	0.1430
9	0.1249	0.1259	0.1269	0.1278	0.1286	0.1293	0.1300	0.1306	0.1312	0.1317
10	0.1123	0.1136	0.1149	0.1160	0.1170	0.1180	0.1189	0.1197	0.1205	0.1212
11	0.1004	0.1020	0.1035	0.1049	0.1062	0.1073	0.1085	0.1095	0.1105	0.1113
12	0.0891	0.0909	0.0927	0.0943	0.0959	0.0972	0.0986	0.0998	0.1010	0.1020
13	0.0782	0.0804	0.0824	0.0842	0.0860	0.0876	0.0892	0.0906	0.0919	0.0932
14	0.0677	0.0701	0.0724	0.0745	0.0765	0.0783	0.0801	0.0817	0.0832	0.0846
15	0.0575	0.0602	0.0628	0.0651	0.0673	0.0694	0.0713	0.0731	0.0748	0.0764
16	0.0476	0.0506	0.0534	0.0560	0.0584	0.0607	0.0628	0.0648	0.0667	0.0685
17	0.0379	0.0411	0.0442	0.0471	0.0497	0.0522	0.0546	0.0568	0.0588	0.0608
18	0.0283	0.0318	0.0352	0.0383	0.0412	0.0439	0.0465	0.0489	0.0511	0.0532
19	0.0188	0.0227	0.0263	0.0296	0.0328	0.0357	0.0385	0.0411	0.0436	0.0459
20	0.0094	0.0136	0.0175	0.0211	0.0245	0.0277	0.0307	0.0335	0.0361	0.0386
21		0.0045	0.0087	0.0126	0.0163	0.0197	0.0229	0.0259	0.0288	0.0314
22				0.0042	0.0081	0.0118	0.0153	0.0185	0.0215	0.0244
23						0.0039	0.0076	0.0111	0.0143	0.0174
24								0.0037	0.0071	0.0104
25										0.0035

1063.8, 1004.9, 1086.2, 1022.5, 1330.9, 1439.4,
1236.5, 1088.1, 1288.7, 1115.8, 1217.5, 1320.7,
1078.1, 1203.4, 1480.0, 1269.9, 1049.2, 1318.4,
1192.0, 1016.0, 1508.2, 1159.6, 1021.3, 986.1,
794.7, 1318.3, 1171.2, 1161.7, 791.2, 1143.8,
1602.0, 951.4, 1003.2, 840.4, 1061.4, 958.0,
1025.2, 1265.0, 1196.5, 1120.7, 1659.3, 942.7,
1123.3, 910.2, 1398.5, 1208.6, 1305.5, 1242.3,
1572.3, 1416.9, 1256.1, 1285.9, 984.8, 1390.3,
1062.2, 1287.3, 1477.0, 1017.9, 1217.7, 1197.1,
1143.0, 1018.8, 1243.7, 909.3, 1030.3, 1124.4,
811.4, 820.9, 1184.1, 1107.5, 991.4, 901.7.

经计算，得

$$D=0.2815$$

$$y=-0.17$$

当$\alpha=0.05$时，由表9.9查得

$$D_{\alpha/2}=-2.63,$$

$$D_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.20$$

今，$y\in[D_{\alpha/2},\ D_{1-\frac{\alpha}{2}}]$，故不拒绝正态性假设。

三、皮尔逊（Pearson）法

此法可检验测量值是否服从某一分布，而此分布不限于正态分布。其法如下[14]：

对某量独立测得n次，得

$$x_1,\ x_2,\cdots,x_n$$

假设它们应服从分布函数为$\psi(y)$的分布，把测量值按分点

$$-\infty=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_m=\infty$$

归入区间，记落入区间$[y_{i-1},y_i]$测量值个数为ν_i，又$\psi(y_i)-\psi(y_{i-1})=P_i$，则

$$\eta=\sum_{i=1}^{m}\frac{(\nu_i-nP_i)^2}{nP_i} \tag{9.13}$$

服从自由度为$m-1$的χ^2分布(n充分大时)，给定显著水平α，查χ^2分布表，可得$P(\chi^2\geqslant\eta_\alpha)=\alpha$中的$\eta_\alpha$，若$\eta<\eta_\alpha$则不拒绝测量值服从分布函数为$\psi(y)$的分布。

若$\psi(y)$中含参数r个，它们须由x_i算出，则$\eta\sim\chi^2(m-r-1)$，而η_α按自由度$m-r-1$的χ^2表查出。

第五节　多组测量误差分析等精度检验

实际工作中经常作多组测量。如当测一个量时，若一台仪器测一组，则几台仪器测量结果为多组测量；又若一人测一组，则几个人测量结果为多组测量，此时为分析组内测量结果的重复性和组间测量结果的再现性，必须进行系统误差检验和误差计算，并作等精度检验。

一、系统误差检验

若我们对某量独立测量了m组，且单次测量都是等精度(等方差)的，要问各组间是否存在系统误差？

即测量结果为

表9.8 夏皮罗·威尔克W(n, α)值

n \ α	0.01	0.05	0.10	n \ α	0.01	0.05	0.10
				26	0.891	0.920	0.933
				27	0.894	0.923	0.935
3	0.753	0.767	0.789	28	0.896	0.924	0.936
4	0.687	0.748	0.792	29	0.898	0.926	0.937
5	0.686	0.762	0.806	30	0.900	0.927	0.939
6	0.713	0.788	0.826	31	0.902	0.929	0.940
7	0.730	0.803	0.838	32	0.904	0.930	0.941
8	0.749	0.818	0.851	33	0.906	0.931	0.942
9	0.764	0.829	0.859	34	0.908	0.933	0.943
10	0.781	0.842	0.869	35	0.910	0.934	0.944
11	0.792	0.850	0.876	36	0.912	0.935	0.945
12	0.805	0.859	0.883	37	0.914	0.936	0.946
13	0.814	0.866	0.889	38	0.916	0.938	0.947
14	0.825	0.874	0.895	39	0.917	0.939	0.948
15	0.835	0.881	0.901	40	0.919	0.940	0.949
16	0.844	0.887	0.906	41	0.920	0.941	0.950
17	0.851	0.892	0.910	42	0.922	0.942	0.951
18	0.858	0.897	0.914	43	0.923	0.943	0.951
19	0.863	0.901	0.917	44	0.924	0.944	0.952
20	0.868	0.905	0.920	45	0.926	0.945	0.953
21	0.873	0.908	0.923	46	0.927	0.945	0.953
22	0.878	0.911	0.926	47	0.928	0.946	0.954
23	0.881	0.914	0.928	48	0.929	0.947	0.954
24	0.884	0.916	0.930	49	0.929	0.947	0.955
25	0.888	0.918	0.931	50	0.930	0.947	0.955

$$D=\frac{\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{n+1}{2}-k\right)\left(x_{(n-k+1)}-x_{(k)}\right)}{\sqrt{n^3\sum_{k=1}^{n}\left(x_{(k)}-\bar{x}\right)^2}} \qquad (9.11)$$

表 9.9　达哥斯特D值

n \ p	0.005	0.025	0.05	0.95	0.975	0.995
50	−3.91	−2.74	−2.21	0.94	1.06	1.24
60	−3.81	−2.68	−2.17	1.00	1.13	1.34
70	−3.73	−2.64	−2.14	1.05	1.19	1.42
80	−3.67	−2.60	−2.11	1.08	1.24	1.48
90	−3.61	−2.57	−2.09	1.12	1.28	1.54
100	−3.57	−2.54	−2.07	1.14	1.31	1.59
150	−3.41	−2.45	−2.00	1.23	1.42	1.75
200	−3.30	−2.39	−1.96	1.29	1.50	1.85
250	−3.23	−2.35	−1.93	1.33	1.55	1.93
300	−3.17	−2.32	−1.91	1.36	1.58	1.98
350	−3.13	−2.29	−1.89	1.38	1.61	2.03
400	−3.09	−2.27	−1.87	1.40	1.63	2.06
450	−3.06	−2.25	−1.86	1.41	1.65	2.09
500	−3.04	−2.24	−1.85	1.42	1.67	2.11
550	−3.02	−2.23	−1.84	1.43	1.68	2.14
600	−3.00	−2.22	−1.83	1.44	1.69	2.15
650	−2.98	−2.21	−1.83	1.45	1.70	2.17
700	−2.97	−2.20	−1.82	1.46	1.71	2.18
750	−2.96	−2.19	−1.81	1.47	1.72	2.20
800	−2.94	−2.18	−1.81	1.47	1.73	2.21
850	−2.93	−2.18	−1.80	1.48	1.74	2.22
900	−2.92	−2.17	−1.80	1.48	1.74	2.23
950	−2.91	−2.16	−1.80	1.49	1.75	2.24
1000	−2.91	−2.16	−1.79	1.49	1.75	2.25

$$y=\sqrt{n}(D-0.28209479)/0.02998598 \qquad (9.12)$$

3. 根n和取定的显著性水平α查表9.9，得$D_{\alpha/2}$和$D_{1-\frac{\alpha}{2}}$。

4. 若$y\in[D_{\alpha/2},D_{1-\frac{\alpha}{2}}]$，则不拒绝正态假设，否则拒绝。

例　对某量独立测得72次，为

	第1组	第2组	…	第m组
	x_{11}	x_{21}	…	x_{m1}
	x_{12}	x_{22}	…	x_{m2}
	⋮	⋮	…	⋮
	x_{1n_1}			x_{mn_m}
		x_{2n_2}		
平均	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	…	$\bar{x}_m$

并算

$$\bar{\bar{x}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}/N,\quad N=\sum_{i=1}^{m}n_i$$

$$Q=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2$$

$$Q_1=\sum_{i=1}^{m}n_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2$$

$$Q_2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$$

则

$$Q=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i+\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\{(x_{ij}-\bar{x}_i)^2+(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2+2(x_{ij}-\bar{x}_i)(\bar{x}_i$$

$$-\bar{\bar{x}})\} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}) \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i) = Q_1 + Q_2$$

若x_{ij}服从正态分布 $N(E_i, \sigma^2)$ 且各组无系统误差，即

$$E_1 = E_2 = \cdots = E_m$$

则$\frac{Q_1}{\sigma^2}$服从自由度 $\nu_1 = m-1$的χ^2分布，$\frac{Q_2}{\sigma^2}$服从自由度 $\nu_2 = N-m$的χ^2分布，且彼此独立，故

$$F = \frac{Q_1}{\nu_1} \Big/ \frac{Q_2}{\nu_2} \tag{9.14}$$

服从自由度$\nu_1 = m-1$，$\nu_2 = N-m$的F分布。

由F分布表附表 4 可查出$P(F \geqslant F_\alpha) = \alpha$的$F_\alpha$值，取定显著性水平$\alpha$，按自由度$\nu_1$，$\nu_2$查出$F_\alpha$，若算出之$F < F_\alpha$，则接受各组间无系统误差的假定。

例 某量测有 4 组值

组号 次数	1	2	3	4
1	1600	1580	1460	1510
2	1610	1640	1550	1520
3	1650	1640	1600	1530
4	1680	1700	1620	1570
5	1700	1750	1640	1600
6	1720		1660	680
7	1800		1740	
8			1820	

作出如下方差分析表

	离差平方和	自由度	平均离差平方和
组间	$Q_1=44374.6$	$\nu_1=3$	$Q_1/\nu_1=14791.5$
组内	$Q_2=149970.8$	$\nu_2=22$	$Q_2/\nu_2=6816.8$
和	$Q=194345.4$	25	

于是

$$F=\frac{Q_1}{\nu_1}\Big/\frac{Q_2}{\nu_2}=\frac{14791.5}{6816.8}=2.17$$

因 $F_{0.05}(3,22)=3.05$，今$F=2.17<F_a=3.05$，故接受各组间无系统误差的假定。

二、误差计算

若

$$x_{ij}=E+a_i+e_{ij}$$

其中E为一个常数。a_i期望为0而方差为σ_A^2，e_{ij}期望为0而方差为σ_W^2，且误差$a_i(i=1,2,\cdots,m)$，$e_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n_i)$中任二个误差独立。则

$$\bar{x}_i=E+a_i+\bar{e}_i$$

$$\bar{x}=E+\bar{a}+\bar{e}$$

其中

$$\bar{e}_i=\frac{1}{n_i}\sum_j e_{ij}$$

$$\bar{a}=\frac{1}{N}\sum_i n_i a_i,\quad \bar{e}=\frac{1}{N}\sum_i\sum_j e_{ij}$$

因

$$Q_2=\sum\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)^2=\sum_i\sum_j(e_{ij}-\bar{e}_i)^2$$

注意第八章式（8.9），得

$$EQ_2=\sum_i\sum_j E(e_{ij}-\bar{e}_i)^2=\sum_i\sum_j V(e_{ij}-\bar{e}_i)^2$$

$$=\sum_i\sum_j\left(\sigma_W^2-\frac{\sigma_W^2}{n_i}\right)=\sigma_W^2\sum_i(n_i-1)$$

$$=\sigma_W^2(N-m)$$

故得σ_W^2无偏估计

$$\widehat{\sigma_W^2}=\frac{Q_2}{\nu_2} \tag{9.15}$$

又

$$Q_1=\sum n_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})=\sum_i n_i(a_i-\bar{a}+\bar{e}_i-\bar{\bar{e}})^2$$

$$=\sum n_i(a_i-\bar{a})^2+\sum_i n_i(\bar{e}_i-\bar{\bar{e}})^2+2\sum_i n_i(a_i-\bar{a})(\bar{e}_i-\bar{\bar{e}})$$

$$E\sum_i n_i(a_i-\bar{a})^2=\sum_i n_i V(a_i-\bar{a})=\sum_i n_i\left(\sigma_A^2-\frac{\sigma_A^2}{N^2}\sum_i n_i^2\right)=\sigma_A^2\left(N-\frac{1}{N}\sum_i n_i^2\right)$$

$$E\sum_i n_i(\bar{e}_i-\bar{\bar{e}})^2=\sum n_i V(\bar{e}_i-\bar{\bar{e}})=\sum n_i\left(\frac{\sigma_W^2}{n_i}-\frac{1}{N^2}\sum_i\sum_j\sigma_W^2\right)=\sum_i\left(\sigma_W^2-\frac{\sigma_W^2}{N}n_i\right)$$

$$=\sigma_W^2(m-1)$$

$$E\sum_i n_i(a_i-\bar{a})(\bar{e}_i-\bar{\bar{e}})=0$$

故

$$EQ_1=\left(N-\frac{1}{N}\sum_i n_i^2\right)\sigma_A^2+(m-1)\sigma_W^2$$

令

$$\frac{1}{m-1}\left(N-\frac{1}{N}\sum_i n_i^2\right)=\bar{n}$$

其意义为一种平均次数，则

$$\sigma_A^2=\frac{N(m-1)}{N^2-\sum_i n_i^2}\left(E\frac{Q_1}{\nu_1}-\sigma_W^2\right)$$

$$=\frac{1}{\bar{n}}\left(E\frac{Q_1}{\nu_1}-\sigma_W^2\right)$$

故得σ_A^2无偏估计

$$\hat{\sigma}_A^2=\frac{N(m-1)}{N^2-\sum_i n_i^2}\left(\frac{Q_1}{\nu_1}-\frac{Q_2}{\nu_2}\right)$$

$$=\frac{1}{\bar{n}}\left(\frac{Q_1}{\nu_1}-\frac{Q_2}{\nu_2}\right) \tag{9.16}$$

当各组次数相等，即 $n_i=n$ 时

$$\hat{\sigma}_A^2=\frac{1}{n}\left(\frac{Q_1}{\nu_1}-\frac{Q_2}{\nu_2}\right) \tag{9.17}$$

上面得到了单次测量偶然误差方差σ_W^2及各组间不确定系统误差的方差σ_A^2的估计式。

要注意，由于估计不准，$\frac{Q_1}{\nu_1}-\frac{Q_2}{\nu_2}$可能为负，这可说明如下：

以$a_i\sim N(0,\sigma_A^2)$，$e_{ij}\sim N(0,\sigma_W^2)$且$n_i=n$即各组次数相等情况为例。因

$$\frac{1}{\sigma_W^2}Q_2\sim\chi^2(N-m)$$

即

$$\frac{\nu_2}{\sigma_W^2}\cdot\frac{Q_2}{\nu_2}\sim\chi^2(\nu_2)$$

又 $x_{ij}\sim N(E,\ \sigma_A^2+\sigma_W^2)$, $\bar{x}_i\sim N\left(E,\ \sigma_A^2+\frac{1}{n}\sigma_W^2\right)$, 此时

$$\bar{\bar{x}}=\frac{1}{m}\sum\bar{x}_i$$

故

$$\frac{\sum\limits_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2}{\sigma_A^2+\frac{1}{n}\sigma_W^2}=\frac{\nu_1}{n\sigma_A^2+\sigma_W^2}\cdot\frac{Q_1}{\nu_1}\sim\chi^2(m-1)$$

由χ^2分布的期望与方差可知

$$E\frac{Q_2}{\nu_2}=\sigma_W^2,\qquad V\frac{Q_2}{\nu_2}=\frac{2}{m(n-1)}\sigma_W^4$$

$$E\frac{Q_1}{\nu_1}=n\sigma_A^2+\sigma_W^2,\qquad V\frac{Q_1}{\nu_1}=\frac{2}{m-1}(n\sigma_A^2+\sigma_W^2)^2$$

一般 $n-1>0$，故

$$V\frac{Q_2}{\nu_2}<V\frac{Q_1}{\nu_1}$$

故当 σ_A^2 较小时，$\frac{Q_1}{\nu_1}$可能小于$\frac{Q_2}{\nu_2}$，即$\frac{Q_1}{\nu_1}-\frac{Q_2}{\nu_2}$可能为负。

对$\frac{Q_1}{\nu_1}-\frac{Q_2}{\nu_2}$为负的情况，$\sigma_A^2$ 可估计为0。

一般，在对多组测量作系统误差检验，若存在系统误差，再估计其方差。

例 在某装置上进行13组测量，各组次数及平均值如下

组号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
次数	26	32	7	50	24	32	36	42	86	33	7	9	55
平均值	1247	1243	1239	1239	1230	1239	1236	1213	1234	1238	1223	1243	1248

作方差分析表

	离差平方和	自由度	平均离差平方和
组间	$Q_1=38786$	$\nu_1=12$	$Q_1/\nu_1=3232$
组内	$Q_2=152094$	$\nu_2=426$	$Q_2/\nu_2=357$
和	$Q=190880$		

于是

$$F=\frac{Q_1}{\nu_1}\Big/\frac{Q_2}{\nu_2}=\frac{3232}{357}=9.05>F_{0.05}(12,426)=1.77$$

各组间存在系统误差，其

$$\hat{\sigma}_A=\sqrt{\frac{N(m-1)}{N^2-\sum n_i^2}\left(\frac{Q_1}{\nu_1}-\frac{Q_2}{\nu_2}\right)}=9$$

而

$$\hat{\sigma}_W=\sqrt{Q_2/\nu_2}=19$$

三、等精度检验

在进行系统误差检验前，要知道各组单次测量是等精度的，即方差相等。此时可用柯克伦（Cochran）检验法[21]。

对每组计算

$$\hat{\sigma}_i^2=\frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$$

作

$$C=\frac{\hat{\sigma}^2_{max}}{\sum_{i=1}^{m}\hat{\sigma}_i^2}$$

取定显著性水平，由表9.10可查出临界值 $C_\alpha(m,n)$，若 $C<C_\alpha(m,n)$，则认为等方差，查表时，取 $n=\max n_i$。

等精度检验也可用其它方法[1]。

例 对某量测得10组如下。并算出

$$\hat{\sigma}_i=\sqrt{\frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}$$ 于表中。

j \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	28.97	28.65	28.83	28.88	28.76	28.82	28.86	28.82	28.60	28.75
2	28.90	28.73	28.75	28.82	28.81	28.83	28.86	28.84	28.66	28.69
3	29.00	28.78	28.82	28.79	28.78	28.86	28.85	28.82	28.71	28.60
$\hat{\sigma}_i$	0.051	0.066	0.044	0.046	0.025	0.032	0.006	0.012	0.055	0.075

于是

$$C=\frac{0.075^2}{0.021488}=0.262$$

取 $\alpha=0.05$，查得 $C_{0.05}(10,3)=0.445$，因

$$C=0.262<0.445$$

故可认为各组等方差。

表 9.10 柯克伦法表

m \ α	n=2		n=3		n=4		n=5		n=6	
	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05
2			0.995	0.975	0.979	0.939	0.959	0.906	0.937	0.877
3	0.993	0.967	0.942	0.871	0.883	0.798	0.834	0.746	0.793	0.707
4	0.968	0.906	0.864	0.768	0.781	0.684	0.721	0.629	0.676	0.590
5	0.928	0.841	0.788	0.684	0.696	0.598	0.633	0.544	0.588	0.506
6	0.883	0.781	0.722	0.616	0.626	0.532	0.564	0.480	0.520	0.445
7	0.838	0.727	0.664	0.561	0.568	0.480	0.508	0.431	0.466	0.397
8	0.794	0.680	0.615	0.516	0.521	0.438	0.463	0.391	0.423	0.360
9	0.754	0.638	0.573	0.478	0.481	0.403	0.425	0.358	0.387	0.329
10	0.718	0.602	0.536	0.445	0.447	0.373	0.393	0.331	0.357	0.303
11	0.684	0.570	0.504	0.417	0.418	0.348	0.366	0.308	0.332	0.281
12	0.653	0.541	0.475	0.392	0.392	0.326	0.343	0.288	0.310	0.262
13	0.624	0.515	0.450	0.371	0.369	0.307	0.322	0.271	0.291	0.246
14	0.599	0.492	0.427	0.352	0.349	0.291	0.304	0.255	0.274	0.232
15	0.575	0.471	0.407	0.335	0.332	0.276	0.288	0.242	0.259	0.220
16	0.553	0.452	0.388	0.319	0.316	0.262	0.274	0.230	0.246	0.208
17	0.532	0.434	0.372	0.305	0.301	0.250	0.261	0.219	0.234	0.198
18	0.514	0.418	0.356	0.293	0.288	0.240	0.249	0.209	0.223	0.189
19	0.496	0.403	0.343	0.281	0.276	0.230	0.238	0.200	0.214	0.181
20	0.480	0.389	0.330	0.270	0.265	0.220	0.229	0.192	0.205	0.174
21	0.465	0.377	0.318	0.261	0.255	0.212	0.220	0.185	0.197	0.167
22	0.450	0.365	0.307	0.252	0.246	0.204	0.212	0.178	0.189	0.160
23	0.437	0.354	0.297	0.243	0.238	0.197	0.204	0.172	0.182	0.155
24	0.425	0.343	0.287	0.236	0.230	0.191	0.197	0.166	0.176	0.149
25	0.413	0.334	0.278	0.228	0.222	0.185	0.190	0.160	0.170	0.144
26	0.402	0.325	0.270	0.221	0.215	0.179	0.184	0.155	0.164	0.140
27	0.391	0.316	0.262	0.215	0.209	0.173	0.179	0.150	0.159	0.135
28	0.382	0.308	0.255	0.209	0.202	0.168	0.173	0.146	0.154	0.131
29	0.372	0.300	0.248	0.203	0.196	0.164	0.168	0.142	0.150	0.127
30	0.363	0.293	0.241	0.198	0.191	0.159	0.164	0.138	0.145	0.124
31	0.355	0.286	0.235	0.193	0.186	0.155	0.159	0.134	0.141	0.120

（续表）

m \ a	n=2		n=3		n=4		n=5		n=6	
	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05
32	0.347	0.280	0.229	0.188	0.181	0.151	0.155	0.131	0.138	0.117
33	0.339	0.273	0.224	0.184	0.177	0.147	0.151	0.127	0.134	0.114
34	0.332	0.267	0.218	0.179	0.172	0.144	0.147	0.124	0.131	0.111
35	0.325	0.262	0.213	0.175	0.168	0.140	0.144	0.121	0.127	0.108
36	0.318	0.256	0.208	0.172	0.165	0.137	0.140	0.118	0.124	0.106
37	0.312	0.251	0.204	0.168	0.161	0.134	0.137	0.116	0.121	0.103
38	0.306	0.246	0.200	0.164	0.157	0.131	0.134	0.113	0.119	0.101
39	0.300	0.242	0.196	0.161	0.154	0.129	0.131	0.111	0.116	0.099
40	0.294	0.237	0.192	0.158	0.151	0.126	0.128	0.108	0.114	0.097

第十章　最小二乘法中的分布

第一节　最小二乘法基础

一、未知量解求

为求未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_t$，常测量它们的线性函数 $n \geqslant t$ 个：$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{it}x_t (i=1, 2, \cdots, n)$，得$l_i$，因$n \geqslant t$，故对 l_i 须考虑残差v_i，才能得到如下等式

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1t}x_t&=l_1-v_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2t}x_t&=l_2-v_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nt}x_t&=l_n-v_n \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

未知量最佳值应满足最小二乘法，即须使

$$\sum v_i^2 = \min$$

由$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2=0$，得$2\sum\limits_{i=1}^{n} v_i a_{ij}=0$或$\sum\limits_{i=1}^{n} v_i a_{ij}=0$，于是

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{i1}\right)x_1+\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{i2}\right)x_2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{it}\right)x_t$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}l_i$$

取$j=1, 2, \cdots, n$，即得求$x_1, x_2, \cdots, x_t$的正规方程即法方程

$$
\left.\begin{array}{l}
(\Sigma a_{i_1}a_{i_1})x_1+(\Sigma a_{i_1}a_{i_2})x_2+\cdots+(\Sigma a_{i_1}a_{i_t})x_t=\Sigma a_{i_1}l_i \\
(\Sigma a_{i_2}a_{i_1})x_1+(\Sigma a_{i_2}a_{i_2})x_2+\cdots+(\Sigma a_{i_2}a_{i_t})x_t=\Sigma a_{i_2}l_i \\
\cdots\cdots\cdots \\
(\Sigma a_{i_t}a_{i_1})x_1+(\Sigma a_{i_t}a_{i_2})x_2+\cdots+(\Sigma a_{i_t}a_{i_t})x_t=\Sigma a_{i_t}l_i
\end{array}\right\} \tag{10.2}
$$

若利用矩阵，则误差方程(10.1)可写为

$$
\underset{nt}{A}\ \underset{t1}{X}=\underset{n1}{L}-\underset{n1}{V} \tag{10.3}
$$

由

$$V=L-AX$$

$$V'=L'-X'A'$$

$$\frac{\partial}{\partial X}V'V=2\left(\frac{\partial V'}{\partial X}\right)V=2A'(AX-L)=0$$

可得正规方程

$$A'AX=A'L \tag{10.4}$$

我们通常可设

1. 测量只有偶然误差，即 $EL=AX_0$（X_0为X真值）；
2. 测量等精度且无关，即 $VL=\sigma^2 I$；
3. $R(A)=t\leqslant n$

于是$R(A'A)=R(A)=t$，故$A'A$满秩，从而有逆$(A'A)^{-1}$，于是

$$X=(A'A)^{-1}A'L \tag{10.5}$$

记

$$(A'A)^{-1}=(q_{ij})=Q \tag{10.6}$$

通常令正规方程右端为1，0，…，0；0，1，…，0；…而解出Q的各列，称Q为权系数矩阵。因$A'A$对称，故Q亦对称。

二、误差计算

下面讨论未知量及其函数标准差的计算。

因

$$X=(A'A)^{-1}A'L$$
$$VL=\sigma^2 I$$

故由式(8.8)可知

$$VX=(A'A)^{-1}A'(VL)A(A'A)^{-1} \tag{10.7}$$
$$=\sigma^2(A'A)^{-1}$$
$$=\sigma^2 Q$$

从而x_i方差及x_i，x_j的相关系数

$$\sigma_i^2=\sigma^2 q_{ii} \tag{10.8}$$
$$\rho_{ij}=q_{ij}/\sqrt{q_{ii}q_{jj}} \tag{10.9}$$

又对于未知量函数

$$f=f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_tx_t$$

记

$$F=(f_1,\ f_2,\ \cdot\ ,f_t)'$$

则

$$f=F'X \tag{10.10}$$

于是

$$\sigma_f^2=Vf=F'(VX)F=\sigma^2F'QF$$
$$=(f_1^2q_{11}+2f_1f_2q_{12}+\cdots+f_2^2q_{22}+\cdots)\sigma^2 \tag{10.11}$$

由下节，我们知道σ的估计

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-t}}$$

但Σv^2如何算？因

$$V=L-AX$$
$$V'=L'-X'A'$$

故

$$\Sigma v^2=V'V=L'L-X'A'L-L'AX+X'A'AX$$

因 $A'AX=A'L$，故

$$
\begin{aligned}
\Sigma v^2 &= L'L-L'AX \\
&= L'L-L'A(A'A)^{-1}A'L \\
&= L'(I-A^{\circ})L \\
&= L'L-(AX)'AX
\end{aligned}
\tag{10.12}
$$

例　求直线

在平面上测得$n\geqslant 2$点为 (ξ_1,η_1)，(ξ_2,η_2)，$\cdots$，(ξ_n,η_n)，对它们配直线

$$\eta=\alpha+\beta\xi$$

列误差方程

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi_1 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & \xi_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \cdot \\ \eta_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$$

则正规方程为

$$\begin{pmatrix} n & \Sigma\xi_i \\ \Sigma\xi_i & \Sigma\xi_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Sigma\eta_i \\ \Sigma\xi_i\eta_i \end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix} n & \Sigma\xi_i \\ \Sigma\xi_i & \Sigma\xi_i^2 \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} \Sigma\xi_i^2 & -\Sigma\xi_i \\ -\Sigma\xi_i & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma\eta_i \\ \Sigma\xi_i\eta_i \end{pmatrix}$$

令

$$S_{\xi\xi}=\Sigma\xi_i^2-n\bar{\xi}^2=\begin{vmatrix} n & \Sigma\xi_i \\ \Sigma\xi_i & \Sigma\xi_i^2 \end{vmatrix}\Big/ n$$

则

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{nS_{\xi\xi}}\{(\Sigma\xi_i^2)(\Sigma\eta_i)-(\Sigma\xi_i)(\Sigma\xi_i\eta_i)\} \\ \dfrac{1}{S_{\xi\xi}}\{\Sigma\xi_i\eta_i-\dfrac{1}{n}(\Sigma\xi_i)(\Sigma\eta_i)\} \end{pmatrix}$$

正规方程亦常由另一法求解，因

$$\begin{cases} n\alpha+(\Sigma\xi_i)\beta=\Sigma\eta_i \\ (\Sigma\xi_i)\alpha+(\Sigma\xi_i^2)\beta=\Sigma\xi_i\eta_i \end{cases}$$

引用高斯求和记号[　　]代替Σ，上式成为

$$\begin{cases} n\alpha+[\xi]\beta=[\eta] \\ [\xi]\alpha+[\xi^2]\beta=[\xi\eta] \end{cases}$$

由记号

$$S_{\xi\xi}=[(\xi-\bar{\xi})^2]$$

$$S_{\xi\eta}=[(\xi-\bar{\xi})(\eta-\bar{\eta})]$$

$$\bar{\xi}=\frac{1}{n}[\xi]$$

$$\bar{\eta}=\frac{1}{n}[\eta]$$

于是

$$\beta=S_{\xi\eta}/S_{\xi\xi}$$

$$\alpha=\bar{\eta}-\bar{\xi}\beta$$

代回误差方程，可求出v_i，而$\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{\Sigma v^2}{n-2}}$且

$$\sigma_\alpha=\sigma\sqrt{\frac{1}{nS_{\xi\xi}}[\xi^2]}$$

$$\sigma_\beta=\sigma\sqrt{1/S_{\xi\xi}}$$

如测得(ξ_i,η_i)如下：

ξ_i	η_i
1	1.0
2	2.2
3	3.0
4	4.5
5	5.0

则误差方程为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.2 \\ 3.0 \\ 4.5 \\ 5.0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}$$

正规方程为

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.7 \\ 57.4 \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.3 \\ -0.3 & 0.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15.7 \\ 57.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 1.03 \end{pmatrix}$$

代回误差方程得 v_i，而

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{5-2}\Sigma v_i^2} = 0.25$$

$$\hat{\sigma}_\alpha = \hat{\sigma}\sqrt{1.1} = 0.26$$

$$\hat{\sigma}_\beta = \hat{\sigma}\sqrt{0.1} = 0.08$$

第二节　正规方程及最小二乘解性质

我们来研究正规方程系数矩阵及最小二乘解的一些性质。

性质 1　正规方程系数矩阵及权系数矩阵对称、满秩、正定。

证　因最小二乘法设 $R(\underset{nt}{A}) = t \leqslant n$，故 $R(A'A) = R(A) = t$，但 $A'A$ 为 t 阶方阵，故满秩。又 $(A'A)' = A'A$，故

$A'A$ 对称。且A为列满秩高阵，故$A'A$正定。

从而正规方程系数矩阵$A'A$对称、满秩、正定。又$B>0$ $\Rightarrow B^{-1}>0$，故权系数矩阵亦必正定，从而对称，满秩。

性质 2　最小二乘解具有唯一性、无偏性、有效性。

证

（1） 因

$$A'AX=A'L$$

而 $A'A$ 满秩，故解唯一。

（2） 对任意函数

$$\begin{aligned} f&=F'X \\ Ef&=F'EX=F'(A'A)^{-1}A'EL \\ &=F'(A'A)^{-1}A'AX_0=F'X_0 \end{aligned}$$

故 f 无偏。

特别取$F'=I$，则得$EX=X_0$。

（3） 对

$$f=F'X$$

$$\sigma_f^2=\sigma^2F'(A'A)^{-1}F$$

若另有 f 的无偏估计 $f^*=F'X^*$，$X^*=GL$，因 X^* 作为f^*特例亦无偏，故$EX^*=GEL=GAX_0=X_0$，此式对任X_0都成立，故 $GA=I$。注意 $\sigma_{f*}^2=F'GG'F\sigma^2$，作$D=\{A(A'A)^{-1}-G'\}F$，因

$$\begin{aligned} D'D&=F'\{(A'A)^{-1}A'-G\}\{A(A'A)^{-1}-G'\}F \\ &=F'\{GG'-(A'A)^{-1}\}F\geqslant 0 \end{aligned}$$

故

$$F'(A'A)^{-1}F\leqslant F'GG'F$$

$$\sigma_f^2\leqslant\sigma_{f*}^2$$

从而最小二乘解的函数 f 包含X的任一分量方差皆最小，有效性得证。

第三节　最小二乘法误差分布

对误差方程

$$AX=L-V$$

若$L\sim N(AX_0,\ \sigma^2 I)$，$R(\underset{nt}{A})=t\leqslant n$，又若

$$AX_0=L-\Delta$$

则误差向量 $\Delta\sim N(0,\ \sigma^2 I)$，由第二章第十一节奇异单位阵 A^* 性质知

$$\begin{aligned}V&=L-AX=L-AA^+L\\&=(I-A^*)L=(I-A^*)(AX_0+\Delta)\end{aligned}$$

因$A^*A=A$，故

$$V=(I-A^*)\Delta$$

由

$$(I-A^*)^2=I-A^*$$

知

$$V'V=\Delta'(I-A^*)\Delta$$

但对幂等对称阵 A^*，有正交阵 F，使 $F'A^*F$ 化为对角阵，其主对角元素t个为1，其余为0。故$F'(I-A^*)F=I-F'A^*F$ 为对角阵，其主对角元素 $n-t$ 个为1，其余为0。而

$$\begin{aligned}V'V&=\Delta'(I-A^*)\Delta\\&=\Delta'FF'(I-A^*)FF'\Delta\end{aligned}$$

为 $n-t$ 个 $N(0,\ \sigma^2)$ 独立随机变量平方和（因$F'\Delta\sim N(0,$

$\sigma^2 I)$)，而

$$\frac{\Sigma v_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-t) \tag{10.13}$$

因

$$E\frac{\Sigma v_i^2}{\sigma^2} = n-t$$

故取

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n-t}} \tag{10.14}$$

下面研究 x_i 及其函数的极限误差。

由

$$X = A^+ L$$

故

$$\begin{aligned} X - X_0 &= A^+ L - (A'A)^{-1} A'AX_0 \\ &= A^+ L - A^+ AX_0 \\ &= A^+(L - AX_0) = A^+ \Delta \end{aligned}$$

但

$$V = (I - A^{\circ})\Delta$$

因 $X - X_0$ 与 V 间协方差为

$$\begin{aligned} & A^+(V\Delta)(I - A^{\circ})' \\ &= \sigma^2 A^+(I - A^{\circ}) = \sigma^2(A^+ - A^+) = 0 \end{aligned}$$

故 $X - X_0$ 与 V 无关。又因

$$\frac{x_i - x_{i0}}{\sigma\sqrt{q_{ii}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\Sigma v_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-t)$$

于是

$$\frac{x_i - x_{i0}}{\sqrt{q_{ii}\ \frac{\Sigma v_i^2}{n-t}}} \triangleq \frac{x_i - x_{i0}}{\hat{\sigma}_i} \sim t(n-t) \tag{10.15}$$

而 x_i 的极限误差

$$\Delta_i = t_p(n-t) \cdot \hat{\sigma}_i \tag{10.16}$$

同样对 x_i 的函数 $f = F'X$，有

$$\frac{f - f_0}{\sqrt{F'QF\ \frac{\Sigma v_i^2}{n-t}}} \triangleq \frac{f - f_0}{\hat{\sigma}_f} \sim t(n-t) \tag{10.17}$$

而 f 的极限误差

$$\Delta_f = t_p(n-t) \cdot \hat{\sigma}_f \tag{10.18}$$

我们有以下性质：

性质 1 若 $L = AX_0 + \Delta$，$\Delta \sim N_n(0,\ \sigma^2 I)$，$R(\underset{nt}{A}) = t \leqslant n$，则 X_0 的最小二乘估计

$$X = (A'A)^{-1}A'L \sim N(X_0,\ \sigma^2(A'A)^{-1})$$

证 因 X 为 $L \sim N(AX_0,\ \sigma^2 I)$ 线性函数，故服从正态分布。又

$$EX = (A'A)^{-1}A'EL = (A'A)^{-1}A'AX_0 = X_0$$

$$VX = \sigma^2(A'A)^{-1}$$

得证。

性质 2 同性质1条件，则

（1） $\frac{(X - X_0)'A'A(X - X_0)}{\sigma^2} \sim \chi^2(t)$

（2） $\frac{V'V}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-t)$

（3） X 与 $\frac{V'V}{n-t}$ 独立

（4） $\dfrac{x_i-x_{i0}}{\sqrt{q_{ii}\quad\dfrac{\Sigma v_i^2}{n-t}}}\sim t(n-t)$

（5） $\dfrac{n-t}{t}\cdot\dfrac{(X-X_0)'A'A(X-X_0)}{V'V}\sim F(t,n-t)$

证

（1） 因 $X-X_0\sim N_t(0,\ \sigma^2(A'A)^{-1})$。

（2） 已证。

（3） 因X与V无关，又皆正态，故独立。

（4） 已证

（5） 由(1) (2)证。

例1 对平面测点 $(\xi_1,\eta_1),\cdots,(\xi_n,\eta_n)$ 配直线

$$\eta=\alpha+\beta\xi$$

由正规方程

$$\begin{cases} n\alpha+[\xi]\beta=[\eta] \\ [\xi]\alpha+[\xi^2]\beta=[\xi\eta] \end{cases}$$

可求出 α，β。

又它们的标准差

$$\sigma_\alpha=\sigma\sqrt{\frac{1}{nS_{\xi\xi}}[\xi^2]}$$

$$\sigma_\beta=\sigma\sqrt{1/S_{\xi\xi}}$$

当按直线 $\eta=\alpha+\beta\xi$ 计算新的 η 时，其标准差

$$\sigma_\eta=\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(\xi-\bar{\xi})^2}{S_{\xi\xi}}}$$

从而极限误差

$$\Delta_\alpha=t_p(n-2)\cdot\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{nS_{\xi\xi}}[\xi^2]}$$

$$\Delta_\beta = t_p(n-2)\cdot\hat{\sigma}\sqrt{1/S_{\xi\xi}}$$

$$\Delta_\eta = t_p(n-2)\cdot\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(\xi-\bar{\xi})^2}{S_{\xi\xi}}}$$

而 σ 估计为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n-2}}$$

其中 v_i 为 η_i 与 $\alpha+\beta\xi_i$ 之差。

例 2 已知两量D、T关系$D=\alpha+\beta T$，今测得(D_i, T_i)如下：

D	4364	4366	4362	4365	4378	4370
T	16	21	18	21	29	24

由最小二乘法，按上列数列出误差方程

$$\alpha+\beta T_i = D_i - v_i,\quad i=1,2,\cdots,6$$

由正规方程解出

$$\beta=1.208$$

$$\alpha=4341.3$$

代回误差方程，求出 v_i，而

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n-2}}=2.374$$

按 t 分布，β 的极限误差

$$\Delta_\beta = t_p(4)\cdot\hat{\sigma}\frac{1}{\sqrt{\Sigma(T_i-\bar{T})^2}}$$

$$=t_{0.9973}(4)\times 0.24=1.59$$

第四节　不等精度及相关最小二乘法

前面论述了误差各分量无关等精度情况，即测量值l_i无

关且等精度情况。下面将讨论相关或无关但不等精度时的最小二乘法。

性质 若 $L=\underset{n\times t}{A}X_0+\Delta$，但 $\Delta\sim N(0,\ \sigma^2P^{-1})$ 且 P^{-1} 正定，$R(A)=t\leqslant n$，则对 X_0 的最小二乘估计 X 及残差 $V=L-AX$ 有

（1） $X=(A'PA)^{-1}A'PL\sim N_t(X_0,\ \sigma^2(A'PA)^{-1})$

（2） $\dfrac{(X-X_0)'A'PA(X-X_0)}{\sigma^2}\sim\chi^2(t)$

（3） $\dfrac{V'PV}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-t)$

（4） X 与 $V'PV$ 独立

（5） $\dfrac{x_i-x_{i0}}{\sqrt{q_{ii}\dfrac{V'PV}{n-t}}}\sim t(n-t)$

其中 $(q_{ij})=Q=(A'PA)^{-1}$，且对 $f=F'X$ 有

$$\frac{f-f_0}{\sqrt{F'QF\dfrac{V'PV}{n-t}}}\sim t(n-t)$$

（6） $\dfrac{n-t}{t}\cdot\dfrac{(X-X_0)'A'PA(X-X_0)}{V'PV}\sim F(t,\ n-t)$

证

（1） 因 $P^{-1}>0$，故有非异方阵 D 使 $P^{-1}=DD'$，而

$$D^{-1}L=D^{-1}AX_0+D^{-1}\Delta$$

上式记为

$$Z=BX_0+\eta$$

则 $\eta\sim N_n(0,\ \sigma^2I)$，于是

$$X=(B'B)^{-1}B'Z=(A'PA)^{-1}A'PL$$

为正态且

$$EX=(A'PA)^{-1}A'PAX_0=X_0$$

$$VX=(A'PA)^{-1}A'P\sigma^2P^{-1}PA(A'PA)^{-1}$$
$$=\sigma^2(A'PA)^{-1}$$

（2） 由(1)

（3） $\dfrac{V'PV}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}(Z-BX)'(Z-BX)\sim\chi^2(n-t)$

（4） 因X与$(Z-BX)'(Z-BX)$独立。

（5） 由(1)(2)(3)可证。

（6） 由(2)(3)(4)可证。

因$V\Delta=VL$，故当测量值l_i相关时，最佳向量X的求法及误差性质可按本性质求出。

我们经常遇到不等精度无关测量情况，此时

$$V\Delta=VL$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}=\sigma^2P^{-1}$$

而

$$P=\begin{pmatrix}p_1 & & \\ & p_2 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$$

其中 p_i 为 l_i 的权。

此时解题所用最小二乘法程序为：

（1） 列误差方程

$$AX=L-V \tag{10.19}$$

（2） 由 $\Sigma p_iv_i^2=V'PV=\min$ 得正规方程

$$A'PAX=A'PL \tag{10.20}$$

（3） 未知量最佳值

$$X=(A'PA)^{-1}A'PL=(q_{ij})A'PL \tag{10.21}$$

（4） 单位权标准差估计值

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\Sigma p_i v_i^2}{n-t}} \tag{10.22}$$

（5） 最佳值及其函数标准差及估计值

$$\sigma_i=\sigma\sqrt{q_{ii}} \tag{10.23}$$

$$\sigma_{F'X}=\sigma\sqrt{F'QF} \tag{10.24}$$

$$\hat{\sigma}_i=\hat{\sigma}\sqrt{q_{ii}} \tag{10.25}$$

$$\hat{\sigma}_{F'X}=\hat{\sigma}\sqrt{F'QF} \tag{10.26}$$

（6） 极限误差

$$\Delta_i=t_p(n-t)\sqrt{q_{ii}\ \frac{\Sigma p_i v_i^2}{n-t}}=t_p(n-t)\cdot\hat{\sigma}_i \tag{10.27}$$

$$\Delta_{F'X}=t_p(n-t)\sqrt{F'QF\ \frac{\Sigma p_i v_i^2}{n-t}}=t_p(n-t)\cdot\hat{\sigma}_{F'X} \tag{10.28}$$

例 某一测量中，测量值无关，得误差方程及相应权为

$$\begin{aligned}
-x+y\quad &= 23-v_1 & \text{权}\ 2\\
-y+z &= 1114-v_2 & \text{权}\ 2\\
-x\quad +z &= 1142-v_3 & \text{权}\ 2\\
x\quad &= 78-v_4 & \text{权}\ 5\\
y\quad &= 99-v_5 & \text{权}\ 5\\
z &= 1216-v_6 & \text{权}\ 5
\end{aligned}$$

为计算方便，取近似值

$$\begin{aligned}
x&=78+\delta x\\
y&=99+\delta y\\
z&=1216+\delta z
\end{aligned}$$

下面只须对 δx，δy，δz 用最小二乘法求最佳值即可。

此时误差方程变为

$$
\begin{array}{lrlr}
-\delta x+\delta y = 2 & -v_1 & 权 & 2\\
-\delta y+\delta z=-3 & -v_2 & 权 & 2\\
-\delta x +\delta z= 4 & -v_3 & 权 & 2\\
\delta x = & -v_4 & 权 & 5\\
\delta y = & -v_5 & 权 & 5\\
\delta z= & -v_6 & 权 & 5
\end{array}
$$

组成正规方程

$$
\begin{aligned}
9\delta x-2\delta y-2\delta z&=-12\\
-2\delta x+9\delta y-2\delta z&=10\\
-2\delta x-2\delta y+9\delta z&=2
\end{aligned}
$$

解得

$$
\begin{aligned}
\delta z&=0.181\\
\delta y&=0.909\\
\delta x&=-1.091
\end{aligned}
$$

将 δx，δy，δz 代回误差方程，求出 v_i 及

$$\Sigma p_i v_i^2=35.46$$

而

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\Sigma p_i v_i^2}{n-t}}=\sqrt{\frac{35.46}{6-3}}=3.4$$

将正规方程右端代以 1，0，0；0，1，0；0，0，1 可得

$$
\begin{aligned}
&q_{11}=0.127,\quad q_{12}=0.036,\quad q_{13}=0.036\\
&\qquad\qquad\quad\; q_{22}=0.127,\quad q_{23}=0.036\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; q_{33}=0.127
\end{aligned}
$$

于是

$$\hat{\sigma}_x=\hat{\sigma}\sqrt{q_{11}}=1.2$$

$$\hat{\sigma}_y=\hat{\sigma}\sqrt{q_{22}}=1.2$$

$$\hat{\sigma}_z=\hat{\sigma}\sqrt{q_{33}}=1.2$$

如需求 $f=-x+y$，则其标准差

$$\sigma_f^2=\sigma^2\{f_1^2q_{11}+2f_1f_2q_{12}+2f_1f_3q_{13}+f_2^2q_{22}$$

$$+2f_2f_3q_{23}+f_3^2q_{33}\}$$

$$=\sigma^2\{(-1)^2q_{11}+2(-1)\times 1q_{12}+0+1^2$$

$$\times q_{22}+0+0\}=\sigma^2 0.18$$

代入 $\hat{\sigma}$，得

$$\hat{\sigma}_f=\hat{\sigma}\sqrt{0.18}=1.4$$

第五节　条件测量平差

如待求向量 $\underset{n1}{L_0}$ 满足条件

$$\underset{rn}{B'}\underset{n1}{L_0}+B_0=0,\quad r<n$$

对 L_0 测得为 L，若 $L_0=L-V$，则上式为

$$B'(L-V)+B_0=0$$

记 $-B'L-B_0=W$，则条件成为

$$B'V+W=0$$

我们通常可设：

1. 测量只有偶然误差，即 $EL=L_0$；
2. 测量向量的分量 l_i 独立，即

$$VL=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2\end{pmatrix}=\sigma^2\begin{pmatrix}p_1^{-1} & & & \\ & p_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\sigma^2P^{-1}$$

3. $R(B)=r$

下面在最小二乘条件 $V'PV=\min$ 下求 V。为此引入联系数向量 $\underset{r1}{K}$，作

$$\psi=V'PV-2K'(B'V+W)$$
$$=V'PV-2(V'B+W')K$$

由

$$\frac{\partial\psi}{\partial V}=2PV-2BK=0\Rightarrow V=P^{-1}BK$$

代入条件式，得求联系数向量K的正规方程

$$B'P^{-1}BK+W=0$$

因正定阵 P^{-1} 可分解为 $P^{-1}=DD'$，而 D 为非异方阵，故 $R(B'P^{-1}B)=R(B'DD'B)=R(D'B)=R(B)=r$，故 $B'P^{-1}B$ 对称、满秩、正定。从而上述方程可解。于是

$$V=P^{-1}BK=-P^{-1}B(B'P^{-1}B)^{-1}W$$

下面讨论有关估计性质及误差计算。

1. 因

$$EV=E\{P^{-1}B(B'P^{-1}B)^{-1}(B'L+B_0)\}$$
$$=P^{-1}B(B'P^{-1}B)^{-1}(B'EL+B_0)=0$$
$$E(L-V)=EL=L_0$$

故$L-V$是 L_0 的无偏估计。

2. $\Sigma p_i v_i^2=V'PV=K'(B'P^{-1}B)K$
$$=-K'W=-WK'$$

3. 方差

$$V(L-V)=V(L-P^{-1}B(B'P^{-1}B)^{-1}(B'L+B_0))$$

即

$$V(L-V)=V(I-P^{-1}B(B'P^{-1}B)^{-1}B')L$$
$$=(I-P^{-1}B(B'P^{-1}B)^{-1}B')P^{-1}(I$$

$$-B(B'P^{-1}B)^{-1}B'P^{-1})\sigma^2$$

$$=P^{-1}(I-B(B'P^{-1}B)^{-1}B'P^{-1})\sigma^2$$

$$V(l_i-v_i)=\sigma^2\left\{\frac{1}{p_i}-(P^{-1}B(B'P^{-1}B)^{-1}B'P^{-1})_{ii}\right\}$$

且线性函数 $f=F'(L-V)$ 的方差

$$Vf=F'P^{-1}(I-B(B'P^{-1}B)^{-1}B'P^{-1})F\sigma^2$$

$$=\sigma^2\left\{\Sigma\frac{f_i^2}{p_i}-F'P^{-1}B(B'P^{-1}B)^{-1}B'P^{-1}F\right\}$$

4. $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{\Sigma p_i v_i^2}{r}}$

例 平面四边形四个内角独立测量结果为 l_1, l_2, l_3, l_4，即

$$L=\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix}$$

l_i 的权为 p_i，这时矩阵

$$P=\begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & p_3 & \\ & & & p_4 \end{pmatrix}$$

我们来确定四边形内角并估计误差。

因条件式 $B'L_0+B_0=0$ 为

$$(1,1,1,1)\begin{pmatrix} l_{10} \\ l_{20} \\ l_{30} \\ l_{40} \end{pmatrix}-2\pi=0$$

取

$$-(1,1,1,1)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix}+2\pi=w$$

得条件式

$$(1,1,1,1)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}+w=0$$

对 k（此时仅一个数）有正规方程

$$(1,1,1,1)\begin{pmatrix} p_1^{-1} & & & \\ & p_2^{-1} & & \\ & & p_3^{-1} & \\ & & & p_4^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}k+w=0$$

得

$$k=-w\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}\right)^{-1}$$

记 $p_0=p_1p_2p_3+p_2p_3p_4+p_1p_3p_4+p_1p_2p_4$，得

$$k=-\frac{p_1p_2p_3p_4}{p_0}(2\pi-l_1-l_2-l_3-l_4)$$

$$V=P^{-1}BK=\begin{pmatrix} p_2p_3p_4p_0^{-1}(l_1+l_2+l_3+l_4-2\pi) \\ p_1p_3p_4p_0^{-1}(l_1+l_2+l_3+l_4-2\pi) \\ p_1p_2p_4p_0^{-1}(l_1+l_2+l_3+l_4-2\pi) \\ p_1p_2p_3p_0^{-1}(l_1+l_2+l_3+l_4-2\pi) \end{pmatrix}$$

而 L 的最佳值为 $L-V$，而

$$V(L-V)=\frac{\sigma^2}{p_0}\begin{pmatrix} p_2(p_3+p_4)+p_3p_4 & -p_3p_4 & -p_2p_4 & -p_2p_3 \\ -p_3p_4 & p_3(p_1+p_4)+p_1p_4 & -p_1p_4 & -p_1p_3 \\ -p_2p_4 & -p_1p_4 & p_4(p_1+p_2)+p_1p_2 & -p_1p_2 \\ -p_2p_3 & -p_1p_3 & -p_1p_2 & p_1(p_2+p_3)+p_2p_3 \end{pmatrix}$$

$$\delta=|l_1+l_2+l_3+l_4-2\pi|\sqrt{p_1p_2p_3p_4p_0^{-1}}$$

第六节　带条件的最小二乘法分布

我们先说明一个二次型的引理。

引理　若随机向量 Y 的方差 $VY=\Sigma$，则二次型的期望

$$E(Y'GY)=\operatorname{tr}(G\Sigma)+(EY')G(EY)$$

证

$$\begin{aligned} E(Y'GY)&=E\{(Y-EY)'G(Y-EY)\} \\ &\quad+(EY')G(EY) \\ &=\operatorname{tr}E\{G(Y-EY)(Y-EY)'\} \\ &\quad+(EY')G(EY) \\ &=\operatorname{tr}(G\Sigma)+(EY')G(EY) \end{aligned}$$

下面研究带有条件的最小二乘法。

若测得待求向量 X_0 的线性函数 L，并知 X_0 应满足 $HX_0=W$，即设

$$L=AX_0+\Delta$$

$$HX_0=W$$

且$\Delta \sim N_n(0, \sigma^2 I)$，$R(\underset{n t}{A})=t$，$R(\underset{st}{H})=s<t$，$X_0$中独立未知数$t-s\leqslant n$。

性质 1　在上述条件下，X_0的最小二乘估计

$$X_H=X-(A'A)^{-1}H'D^{-1}(HX-W)$$

其中$D=H(A'A)^{-1}H'$，而$X=(A'A)^{-1}A'L$为无条件时的最小二乘估计。

证　因待求的X_H应满足条件$HX_H=W$，故引入联系数$\underset{s1}{\lambda}$，作

$$Q=(L-AX_H)'(L-AX_H)+2\lambda'(HX_H-W)$$

由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial X_H}=-2A'L+2A'AX_H+2H'\lambda=0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \lambda}=2(HX_H-W)=0 \end{cases}$$

得

$$HX_H=W$$

$$\begin{aligned} X_H&=(A'A)^{-1}A'L-(A'A)^{-1}H'\lambda \\ &=X-(A'A)^{-1}H'\lambda \end{aligned}$$

因

$$W=HX_H=HX-H(A'A)^{-1}H'\lambda$$

故

$$\begin{aligned} \lambda&=(H(A'A)^{-1}H')^{-1}(HX-W) \\ &=D^{-1}(HX-W) \end{aligned}$$

$$X_H=X-(A'A)^{-1}H'D^{-1}(HX-W)$$

性质 2　同上条件，成立

$$\|L-AX_0\|^2=\|L-AX\|^2+\|A(X-X_H)\|^2+\|A(X_H-X_0)\|^2$$

证

$$\begin{aligned}左&=(L-AX_0)'(L-AX_0)\\&=\{(L-AX)+(AX-AX_H)+(AX_H-AX_0)\}'\{(L-AX)+(AX-AX_H)+(AX_H-AX_0)\}\\&=右+2(L-AX)'A(X-X_H)+2(L-AX)'A(X_H-X_0)+2(X-X_H)'A'A(X_H-X_0)\end{aligned}$$

因

$$(L-AX)'A=V'A=0$$

$$\begin{aligned}&(X-X_H)'A'A(X_H-X_0)\\&=\lambda'H(A'A)^{-1}A'A(X_H-X_0)\\&=\lambda'(W-W)=0\end{aligned}$$

得证。

性质 3 同上条件，成立

$$\|L-AX_H\|^2=\|L-AX\|^2+\|A(X-X_H)\|^2$$

证

$$\begin{aligned}左&=\{(L-AX)+A(X-X_H)\}'\{(L-AX)+A(X-X_H)\}\\&=右+2(L-AX)'A(X-X_H)\\&=右\end{aligned}$$

性质 4 同上条件，成立

（1） $X_H \sim N_t(X_0, \sigma^2(A'A)^{-1}(I-H'D^{-1}H(A'A)^{-1}))$

（2） $E\|A(X-X_H)\|^2=s\sigma^2$

（3） 记 $V_H=AX_H-L$，$RSS_H=V_H'V_H$，则

$$E(RSS_H)=(n-t+s)\sigma^2$$

证

（1） $X_H=X-(A'A)^{-1}H'D^{-1}(HX-W)$

$$=\{I-(A'A)^{-1}H'D^{-1}H\}X-(A'A)^{-1}H'D^{-1}W$$

X_H 为X线性函数，因X正态，故X_H正态。又

$$EX_H=X_0-(A'A)^{-1}H'D^{-1}(HX_0-W)=X_0$$

$$VX_H=\{I-(A'A)^{-1}H'D^{-1}H\}\sigma^2(A'A)^{-1}\{I-(A'A)^{-1}H'D^{-1}H\}'$$

$$=\sigma^2(A'A)^{-1}(I-H'D^{-1}H(A'A)^{-1})$$

（2） 因

$$X-X_H=(A'A)^{-1}H'D^{-1}(HX-W)$$

故

$$\|A(X-X_H)\|^2=(X-X_H)'A'A(X-X_H)$$

$$=(HX-W)'D^{-1}H(A'A)^{-1}A'A(A'A)^{-1}\cdot H'D^{-1}(HX-W)$$

$$=(HX-W)'D^{-1}(HX-W)$$

因$HX-W$正态，且

$$E(HX-W)=HX_0-W=0$$

$$V(HX-W)=H\sigma^2(A'A)^{-1}H'=\sigma^2D$$

故$HX-W\sim N_s(0,\ \sigma^2D)$。令

$$V(X-X_H)=V\{(A'A)^{-1}H'D^{-1}(HX-W)\}$$

$$=\sigma^2(A'A)^{-1}H'D^{-1}H(A'A)^{-1}$$

由引理

$$E\|A(X-X_H)\|^2$$

$$=E(X-X_H)'A'A(X-X_H)$$

$$=\mathrm{tr}\,A'A\sigma^2(A'A)^{-1}H'D^{-1}H(A'A)^{-1}+0$$

$$=\mathrm{tr}\,\sigma^2H'D^{-1}H(A'A)^{-1}$$

$$=\sigma^2\mathrm{tr}D^{-1}H(A'A)^{-1}H'$$
$$=\sigma^2\mathrm{tr}D^{-1}D$$
$$=\sigma^2\mathrm{tr}I_s$$
$$=s\sigma^2$$

（3） 由性质3，若记无条件残差平方和

$$\|L-AX\|^2=RSS$$

则

$$E\ RSS_H=E\ RSS+E\|A(X-X_H)\|^2$$
$$=(n-t+s)\sigma^2$$

性质5 同上条件，成立

（1） $RSS_H-RSS=(HX-W)'\cdot\{H(A'A)^{-1}H'\}^{-1}(HX-W)$

（2） RSS_H-RSS与RSS独立，且

$$\frac{RSS_H-RSS}{\sigma^2}\sim\chi^2(s)$$

$$\frac{RSS_H-RSS}{RSS}\cdot\frac{n-t}{s}\sim F(s,\ n-t)$$

证

（1） 由性质4证(2)中知，有

$$RSS_H-RSS=\|A(X-X_H)\|^2$$
$$=(HX-W)'D^{-1}(HX-W)$$

代回D，得证。

（2） 因RSS_H-RSS是X函数，但RSS与X独立，故RSS_H-RSS与RSS独立。又由性质4证(2)中有

$$HX-W\sim N_s(0,\ \sigma^2H(A'A)^{-1}H)$$

故

$$\frac{(HX-W)'(H(A'A)^{-1}H')^{-1}(HX-W)}{\sigma^2}\sim\chi^2(s)$$

即

$$\frac{RSS_H - RSS}{\sigma^2} \sim \chi^2(s)$$

又

$$\frac{RSS}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-t)$$

得F分布。

第七节　带条件的最小二乘法分布应用

上节理论可用于假设检验。若

$$L = AX_0 + \Delta$$
$$H_0: HX_0 = W$$

且$\Delta \sim N_n(0, \sigma^2 I)$，$R(\underset{nt}{A}) = t$，$R(\underset{st}{H}) = s < t$，$t - s \leqslant n$。

现可检验H_0假设，即$HX_0 = W$是否为真。

1．用F分布

若H_0为真，由上节性质5，知

$$F = \frac{(HX-W)'(H(A'A)^{-1}H')^{-1}(HX-W)}{RSS} \cdot \frac{n-t}{s} \sim F(s, n-t)$$

例1　设

$$\begin{cases} y_1 = a_{10} + \delta_1 \\ y_2 = 2a_{10} - a_{20} + \delta_2 \\ y_3 = a_{10} + 2a_{20} + \delta_3 \end{cases}$$

$$H_0: a_{10} = a_{20}$$

则H_0为

$$HX_0 = (1, -1)\begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} = 0$$

因

$$L=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

当H_0成立时

$$F=\frac{(HX)'(H(A'A)H')^{-1}(HX)}{RSS}\cdot\frac{1}{1}\sim F(1,1)$$

因

$$A'A=\begin{pmatrix} 6 & \\ & 5 \end{pmatrix},\quad (A'A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1/6 & \\ & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$X=(A'A)^{-1}A'L=\begin{pmatrix} \frac{1}{6}(y_1+2y_2+y_3) \\ \\ \frac{1}{5}(-y_2+2y_3) \end{pmatrix}$$

故

$$F=\frac{(a_1-a_2)^2}{RSS}\cdot\frac{30}{11}\sim F(1,1)$$

若$F<F_\alpha(1,1)$，则接受H_0。

例 2

$$L=AX_0+\Delta$$
$$H_0: \; x_{01}=\cdots=x_{0,t-1}=0$$

此时H_0成为$HX_0=0$，而

$$H=(\underset{t-1}{I}\;\; 0)$$

当H_0成立

$$\frac{(HX)'(H(A'A)^{-1}H')^{-1}HX}{RSS}\cdot\frac{n-t}{s}\sim F(t-1,\; n-t)$$

2．用 t 分布

若$H=(a_1,\cdot,a_t)$为行向量，此时$HX_0=w$为常数，因

$$HX-w\sim N(0,\ \sigma^2d^2)$$

其中$d^2=H(A'A)^{-1}H'$，故

$$\frac{HX-w}{\sigma d}\sim N(0,1)$$

$$\frac{RSS}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-t)\text{ 且与}X\text{独立}$$

于是

$$\frac{HX-W}{\sigma d}\Big/\sqrt{\frac{RSS}{\sigma^2(n-t)}}=\frac{HX-W}{d\sqrt{\frac{RSS}{n-t}}}\sim t(n-t)$$

例 3

$$L=AX_0+\Delta$$

$$H_0:\quad x_{i0}=c_i\quad(c_i\text{为某一常数})$$

取

$$H=(0,\cdot,0,1,0,\cdot,0)$$

因

$$HX=x_i$$

$$d^2=H(A'A)^{-1}H'=q_{ii}$$

式中 $(A'A)^{-1}=(q_{ij})$，故

$$t=\frac{x_i-c_i}{\sqrt{q_{ii}\frac{RSS}{n-t}}}\sim t(n-t)$$

若t小于t分布临界值，则可认为$x_{i0}=c_i$。

第十一章　非中心分布、Wishart及Hotelling分布

第一节　非中心χ^2分布

定义　若$\xi_i \sim N(\mu_i, 1)$独立，称

$$\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^2 \sim \chi^2(\nu, \lambda)$$

即自由度为ν，非中心参数为$\lambda = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i^2$的非中心$\chi^2$分布。$\chi^2(\nu, \lambda)$亦记为$\chi_\nu^2(\lambda)$。

性质1　$\chi^2(\nu, \lambda)$有密度

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}(\lambda+x)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m \frac{x^{m+\frac{\nu}{2}-1}}{2^{m+\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(m+\frac{\nu}{2}\right)}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{11.1}$$

证　若至少一个$\mu_i \neq 0$，作正交变换

$\underset{\nu 1}{\eta} = \underset{\nu\nu}{B} \underset{\nu 1}{\xi}$，$B$首行为$\left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\lambda}}, \cdots, \frac{\mu_\nu}{\sqrt{\lambda}}\right)$，其中$\lambda = \mu_1^2 + \cdots + \mu_\nu^2$，故

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Sigma \mu_i \xi_i$$

$$\Sigma(\xi_i-\mu_i)^2=\Sigma\xi_i^2-2\Sigma\xi_i\mu_i+\Sigma\mu_i^2$$
$$=\Sigma\eta_i^2-2\eta_1\sqrt{\lambda}+\lambda$$
$$=(\eta_1-\sqrt{\lambda})^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_\nu^2$$

因 ξ 密度为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2}\Sigma(\xi_i-\mu_i)^2\right\}$$

故 η 密度为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2}\ \left((\eta_1-\sqrt{\lambda})^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_\nu^2\right)\ \right\}$$

由对其余变量积分，知 η_i 独立，且 $\eta_1\sim N(\sqrt{\lambda},\ 1)$，$\eta_2$，$\cdots$，$\eta_\nu\sim N(0,1)$，于是 $\Sigma\xi_i^2=\Sigma\eta_i^2=u+v$，而 $u=\eta_1^2$，$v=\eta_2^2+\cdots+\eta_\nu^2\sim\chi^2(\nu-1)$。

因 $\eta_1\sim N(\sqrt{\lambda},\ 1)$，故 η_1^2 密度当 $x<0$ 时为 $g(x)=0$，当 $x\geqslant0$ 时

$$g(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{1}{2}}\left\{\exp\left(-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{\lambda})^2}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\exp\left(-\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{\lambda})^2}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\lambda}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(e^{\sqrt{\lambda x}}+e^{-\sqrt{\lambda x}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\lambda}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(\sqrt{\lambda x})^m\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(-\sqrt{\lambda x})^m\ \right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\lambda}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}x^{m-\frac{1}{2}}\lambda^m$$

因

$$m!2^{2m}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=(2m)!\sqrt{\pi}$$

故

$$g(x)=e^{-\frac{\lambda}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m\chi^2(x|2m+1)$$

其中 $\chi^2(x|2m+1)$为自由度为 $2m+1$ 的 χ^2 密度 $f(x)$，而 (u, v)密度为

$$e^{-\frac{\lambda}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m\chi^2(x|2m+1)\chi^2(y|\nu-1)$$

由 χ^2 可加性，知 $\Sigma\xi_i^2$ 密度为

$$e^{-\frac{\lambda}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m\chi^2(x|2m+\nu)$$

代入 χ^2 密度得证。

性质 2 同性质 1 条件，当各 $\mu_i=0$，$\chi^2(\nu, \lambda)$ 即为 $\chi^2(\nu)$。

我们知道，对$\chi^2(\nu)$，其半不变量$\kappa_1=\nu$，$\kappa_2=2\nu$。

性质 3 若 $\eta_i\sim\chi^2(\nu_i, \lambda_i)$独立，则 $\sum_{i=1}^{m}\eta_i\sim\chi^2\left(\sum_{i=1}^{m}\nu_i, \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)$。

性质 4 若$\xi_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$独立，则$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i^2 \sim \chi^2\Big(\nu, \frac{1}{\sigma^2}$

$\cdot\sum_{i=1}^{\nu}\mu_i^2\Big)$.

此作$\eta_i = \frac{1}{\sigma}\xi_i \sim N\left(\frac{\mu_i}{\sigma}, 1\right)$，而$\frac{1}{\sigma^2}\Sigma\xi_i^2 = \Sigma\eta_i^2$知。

性质 5 若$\xi \sim N_\nu(\mu, I)$则$\xi'\xi \sim \chi^2(\nu, \mu'\mu)$。

将定义中$\xi_1, \cdots, \xi_\nu$作为ξ分量即可。

性质 6 $\chi^2(\nu, \lambda)$的特征函数

$$\theta(t) = (1-2it)^{-\nu/2}\exp\frac{\lambda it}{1-2it}$$

证 由$\chi^2(\nu, \lambda)$密度，知其特征函数

$$\theta(t) = \int e^{itx}f(x)dx = e^{-\frac{\lambda}{2}}\Sigma\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m (1-2it)^{-m-\frac{\nu}{2}}$$

因

$$\exp\left\{\frac{\lambda it}{1-2it} + \frac{\lambda}{2}\right\} = \exp\left\{\frac{\lambda}{2(1-2it)}\right\}$$

$$= \Sigma\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2(1-2it)}\right)^m$$

故

$$\theta(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}}\exp\left\{\frac{\lambda it}{1-2it} + \frac{\lambda}{2}\right\}(1-2it)^{-\frac{\nu}{2}}$$

$$= (1-2it)^{-\nu/2}\exp\left\{\frac{\lambda it}{1-2it}\right\}$$

性质 7 $\chi^2(\nu, \lambda)$的半不变量

$$\kappa_r=(\nu+r\lambda)2^{r-1}(r-1)!$$

如$\kappa_1=\nu+\lambda$，$\kappa_2=2(\nu+2\lambda)$，$\kappa_3=8(\nu+3\lambda)$，$\kappa_4=48(\nu+4\lambda)$。

性质 8 $\chi^2(\nu, \lambda)$与χ^2关系

（1） 分布函数

$$F(x; \nu, \lambda)=F_1\left(\frac{x}{1+b}; \nu_1\right)$$

而 $a=\nu+\lambda$，$b=\frac{\lambda}{\nu+\lambda}$，$\nu_1=\frac{a}{1+b}$。

（2） 分位点：若

$$F(x_p; \nu, \lambda)=F_1(x'_p; \nu_1)=1-p$$

则分位点$x_p=(1+b)x'_p$

性质 9 若$y\sim N_p(\mu, \Sigma)$且$\Sigma>0$，则

$$y'\Sigma^{-1}y\sim\chi^2(p, \mu'\Sigma^{-1}\mu)$$

证 因$\Sigma>0$，故有非异方阵C使$C\Sigma C'=I$，或$\Sigma=C^{-1}\cdot(C')^{-1}$，取$z=Cy$，则$y'\Sigma^{-1}y=z'(C\Sigma C')^{-1}z=z'z$，因$z\sim N_p(C\mu, I)$，故$y'\Sigma^{-1}y=z'z\sim\chi^2(p, \mu'C'C\mu)=\chi^2(p, \mu'\Sigma^{-1}\mu)$。

性质10 若样本向量$x_1, \cdots, x_n$为独立同分布$N_p(\mu, \Sigma)$随机向量，则平均向量

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i\sim N_p\left(\mu, \frac{1}{n}\Sigma\right)$$

证 因

$$E\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma Ex_i=\frac{1}{n}n\mu=\mu$$

$$V\bar{x}=E(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)'$$

$$=E\left(\frac{\Sigma x}{n}-\mu\right)\left(\frac{\Sigma x}{n}-\mu\right)'$$

$$=\frac{1}{n^2}E(\Sigma x-n\mu)(\Sigma x-n\mu)'$$

因 x_i 与 x_j 独立，故

$$V\bar{x}=\frac{1}{n^2}\Sigma E(x_i-\mu)(x_i-\mu)'$$

$$=\frac{1}{n^2}n\Sigma=\frac{1}{n}\Sigma$$

故 $\bar{x}\sim N_p\left(\mu,\ \frac{1}{n}\Sigma\right)$

性质11 若样本向量 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ 为独立同分布 $N_p(\mu,\ \Sigma)$ 随机向量，则当 $\Sigma>0$ 时有

$$n(\bar{x}-\mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu)\sim\chi^2(p,\ n(\mu-\mu_0)'\Sigma^{-1}(\mu-\mu_0))$$

其中 μ_0 为与 μ 同阶向量。

证 作 $y=\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)\sim N_p(\sqrt{n}(\mu-\mu_0),\ \Sigma)$，而

$$n(\bar{x}-\mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu)=y'\Sigma^{-1}y$$

由性质 9 得证。

第二节 非中心t分布

定义 若 $\xi\sim N(\lambda,\ 1)$，$\eta\sim\chi^2(\nu)$ 独立，称

$$\zeta=\frac{\xi}{\sqrt{\eta/\nu}}\sim t(\nu,\ \lambda)$$

即自由度 ν 非中心参数 λ 的非中心 t 分布。

性质 1 $t(\nu,\ \lambda)$ 的密度为

$$f(x)=\frac{\nu^{\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)(\nu+x^2)^{\frac{\nu+1}{2}}}\sum_{m=1}^{\infty}\Gamma\left(\frac{\nu+m+1}{2}\right)$$

$$\cdot \frac{(\lambda x)^m}{m!}\left(\frac{2}{\nu+x^2}\right)^{\frac{m}{2}} \tag{11.2}$$

证 (ξ, η)概率元为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\left(\frac{y-\lambda}{2}\right)^2} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1} dydx$$

作变换 $y=r\sin\theta$, $x=r^2\cos^2\theta$, 则$|J|=2r^2\cos\theta$, (r, θ)密度元为

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}(r^2-2\lambda r\sin\theta)} r^\nu(\cos\theta)^{\nu-1}drd\theta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} (\cos\theta)^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\sin\theta)^m}{m!} r^{\nu+m} drd\theta$$

对 r 从 0 到∞积分，注意

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r^{\nu+m} dr = 2^{\frac{\nu+m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu+m+1}{2}\right)$$

得 θ 密度为

$$\frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\cos\theta)^{\nu-1} \sum_m \Gamma\left(\frac{\nu+m+1}{2}\right) 2^{\frac{\nu+m+1}{2}} \cdot \frac{(\lambda\sin\theta)^m}{m!}$$

但 ζ 变量取值 $z=\sqrt{\nu}\operatorname{tg}\theta$, 将 θ 变到 z,注意 $d\theta=\nu^{-\frac{1}{2}}\cos^2\theta$

dt，将 z 换回 x，得证。

性质 2　若 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为独立同分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 随机变量，而 b 为任一数，则

$$\eta=\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-b)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma(\xi_i-\bar{\xi})^2}}\sim t\left(n-1, \frac{\sqrt{n}(\mu-b)}{\sigma}\right)$$

证　因

$$\eta=\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-b)/\sigma}{\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma(\xi_i-\bar{\xi})^2}}$$

而分子为 $N\left(\frac{\sqrt{n}(\mu-b)}{\sigma}, 1\right)$ 变量，$\frac{1}{\sigma^2}\Sigma(\xi_i-\bar{\xi})^2\sim\chi^2(n-1)$ 且独立，得证。

从此性质知，若 $b=\mu$，则 $\eta\sim t(n-1)$。

性质 3　设 $\xi_1, \cdots, \xi_m, \eta_1, \cdots, \eta_n$ 全体独立，$\xi_i\sim N(\mu_1, \sigma^2)$，$\eta_i\sim(\mu_2, \sigma^2)$ 则

$$\zeta=\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}\cdot\frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}-c}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\bar{\xi})^2+\sum_{i=1}^{n}(\eta_i-\bar{\eta})^2}}$$

$$\sim t(m+n-2, \delta)$$

而 c 为任一数，且

$$\delta=\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\cdot\frac{\mu_1-\mu_2-c}{\sigma}$$

特别当 $c=\mu_1-\mu_2$ 时，$\zeta\sim t(m+n-2)$。

性质 4　$t(\nu, \lambda)$ 的期望与方差为

$$E=c_{11}\lambda$$

$$\sigma^2=c_{22}\lambda^2+c_{20}$$

而

$$c_{11}=\frac{\sqrt{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)},\ c_{22}=\frac{\nu}{\nu-2}-c_{11}^2,\ c_{20}=\frac{\nu}{\nu-2}$$

性质 5 若 $t(\nu,\ \lambda)$，$t(\nu)$，$N(0,\ 1)$分布函数

$$F(t;\ \nu,\ \lambda)=F(t';\ \nu)=\Phi(x)$$

则

$$t=t'+\lambda\left(1+\frac{2x^2+1}{4\nu}+\frac{4x^4+12x^2+1}{32\nu^2}\right)$$

$$+\lambda^2\left(\frac{x^2}{4\nu}+\frac{x^3+4x}{16\nu^2}\right)$$

$$-\lambda^3\left(\frac{x^3-1}{24\nu^2}\right)-\lambda^4\frac{x}{32\nu^2}$$

第三节 非中心F分布

定义 若 $\xi_1\sim\chi^2(\nu_1,\ \lambda)$；$\xi_2\sim\chi^2(\nu_2)$独立，称

$$\eta=\frac{\xi_1}{\nu_1}\Big/\frac{\xi_2}{\nu_2}\sim F(\nu_1,\ \nu_2,\ \lambda)$$

即自由度 ν_1，ν_2 非中心参数 λ 的非中心F分布。

性质 1 $F(\nu_1,\ \nu_2,\ \lambda)$有密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\nu_1 e^{-\lambda/2}}{\nu_2\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m\left(\frac{\nu_1 x}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1+2m-2}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}+m\right)\left(1+\frac{\nu_1 x}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+m}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}\tag{11.3}$$

性质 2 若$\xi\sim t(\nu,\ \delta)$则$\xi^2\sim F(1,\ \nu,\ \delta^2)$。特别有，若$\xi\sim t(\nu)$，则$\xi^2\sim F(1,\ \nu)$。

证 因

$$\xi=\frac{N(\delta,1)}{\sqrt{\chi^2(\nu)/\nu}}\Rightarrow\xi^2=\frac{\chi^2(1,\delta^2)}{\chi^2(\nu)/\nu}$$

且分子分母独立。

性质 3 若非中心F分布与F分布的分布函数成立

$$F(F;\ \nu_1,\ \nu_2,\ \lambda)=F'(F';\ \nu_1',\ \nu_2)$$

则

$$F'=\frac{\nu_1 F}{\nu_1+\lambda},\quad \nu_1'=\frac{(\nu_1+\lambda)^2}{\nu_1+2\lambda}$$

性质 4 $F(\nu_1,\ \nu_2,\ \lambda)$期望与方差为

$$E=\frac{\nu_2(\nu_1+\lambda)}{(\nu_2-2)\nu_1},\quad 当\ \nu_2>2$$

$$\sigma^2=\frac{2\nu_2^2}{(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)\nu_1^2}\{(\nu_1+\lambda)^2+(\nu_2-2)(\nu_1+2\lambda)\},$$

当$\nu_2>4$

第四节 非中心分布应用

非中心分布在统计检验中有不少应用[22]。

统计检验中要用施行特征函数。施行特征函数即OC函数指

$$L(w,\ Q)=1-P(\xi\in w|Q)$$

其中w为拒绝域，Q为参数。

若Q_0为原假设，Q为备择假设，而

$$L(w,\ Q_0)=1-\alpha$$

$$L(w,\ Q_1)=\beta$$

称 α 为拒真概率，β 为纳伪概率。

理想情况是：当 $Q=Q_0$ 时 $L(w,\ (Q)=1$；当 $Q=Q_1$ 时 $L(w,\ Q)=0$。

设在一个总体中，$x\sim N(m,\ \sigma^2)$，m，σ 未知，现研究 m。若 $Q=Q_0$ 指 $m=m_0$，$Q=Q_1$ 指 $m=m_1$，而

$$w: |t|\geqslant t_a$$

而

$$t=\frac{\bar{x}-m_0}{s_1}\sqrt{n-1}$$

$$s_1=\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$$

此时

$$L(w,\ Q)=P(t\in w|Q)$$

为

$$P\left(-t_a\leqslant t\leqslant t_a\left|\left|\frac{m-m_0}{\sigma}\right|\right.\right)$$

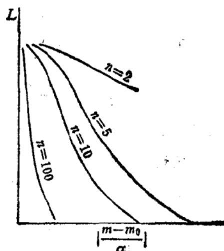


图11.1　施行特征函数

而 t 服从非中心分布 $t\left(n-1,\ \frac{m-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

设此非中心 t 的密度为 $f(y)$，则 $L(w,\ Q)$为

$$\int_{-t_a}^{t_a} f(y)dy$$

当 $\alpha=0.05$ 时，L 图如图11.1。

第五节　Wishart分布

定义　若 $y_a\sim N_p(\mu_a,\ \Sigma)$独立，且$\Sigma$正定

$$M=\begin{pmatrix}\mu_1' \\ \vdots \\ \mu_n'\end{pmatrix}$$

则称

$$A=\sum_{a=1}^{\nu} y_a y_a' \sim W_p(\nu,\ \Sigma,\ M'M)$$

即非中心 Wishart 分布[28]。

定义 若 $y_a \sim N_p(0,\ \Sigma)$独立，且Σ正定，称

$$A=\sum_{a=1}^{\nu} y_a y_a' \sim W_p(\nu,\ \Sigma)$$

即 Wishart 分布。

引理 若对称方阵

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

其中 A_{22} 为非异方阵，作

$$B=\begin{pmatrix}I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I\end{pmatrix}$$

则

$$BAB'=\begin{pmatrix}A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & \\ & A_{22}\end{pmatrix}$$

$$|A|=|B|\,|A|\,|B|=|A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|\cdot|A_{22}|$$

当A正定，则BAB'正定（因有 $A=DD'$，D 为非异方阵），且$A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 正定。

性质 1 当 $\nu\geqslant p$ 时，$A=\sum_{a=1}^{\nu} y_a y_a' \sim W_p(\nu,\ \Sigma)$

分布密度为

$$f(A)=\begin{cases} \dfrac{|A|^{\frac{\nu-p-1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\Sigma^{-1}A\right)}{2^{\frac{p\nu}{2}}\pi^{\frac{1}{4}p(p-1)}|\Sigma|^{\frac{\nu}{2}}\prod\limits_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{\nu-i+1}{2}\right)}, & A>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{11.4}$$

注意所谓随机矩阵分布指其各元素联合分布，对于对称随机矩阵 A，是指其不同元素 a_{11}，a_{12}，…，a_{1n}，a_{22}，…，a_{2n}，…，a_{nn}的$\dfrac{n(n+1)}{2}$维联合分布。

证

1. 先证$\Sigma=I$情况。用归纳法

当 $p=1$ 时，$A\sim\chi^2(\nu)$，性质成立。设对 $p-1$ 维性质成立，往证对 p 维成立。命

$$y=(y_{11},\ y_{21},\ \cdot,\ y_{\nu 1})$$

$$x=\begin{pmatrix} y_{12} & y_{22} & \cdot & y_{\nu 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1p} & y_{2p} & \cdot & y_{\nu p} \end{pmatrix}\triangleq(y_1^{(2)},y_2^{(2)},\ \cdot,\ y_\nu^{(2)})$$

而

$$y_\alpha=\begin{pmatrix} y_{\alpha 1} \\ y_{\alpha 2} \\ \cdot \\ y_{\alpha p} \end{pmatrix}$$

则

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu}y_\alpha y_\alpha'=\begin{pmatrix} yy' & yx' \\ xy' & xx' \end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix} a_{11} & a_{(1)}' \\ a_{(1)} & A_{22} \end{pmatrix}$$

对固定的 x，求 y_{a1} 对 $y_a^{(2)}$ 的回归，误差方程

$$y'=x'\beta_0+\varepsilon$$

按最小二乘法，得 $\beta=(xx')^{-1}xy'=A_{22}^{-1}a_{(1)}$，注意 $y'\sim N(0, I)$，因 $\beta=A_{22}^{-1}xy'$，$V\beta=A_{22}^{-1}xIx'A_{22}^{-1}=A_{22}^{-1}$，故 $\beta\sim N(0, A_{22}^{-1})$，又残差平方和由式（10.12）得

$$yy'-(x'\beta)'x'\beta=a_{11}-a'_{(1)}A_{22}^{-1}a_{(1)}\sim\chi^2_{\nu-p+1}$$

（故要求 $\nu\geqslant p$）.

残差平方和 RSS 与 $\beta=A_{22}^{-1}a_{(1)}$ 独立，故 RSS 与 $a_{(1)}=A_{22}A_{22}^{-1}a_{(1)}$ 独立，而密度

$$f(a_{11}-a'_{(1)}A_{22}^{-1}a_{(1)},\ a'_{(1)},\ A_{22})$$
$$=f(a_{11}-a'_{(1)}A_{22}^{-1}a_{(1)},\ a'_{(1)}|A_{22})f(A_{22})$$

$$=\frac{u^{\frac{\nu-p+1}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{\nu-p+1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu-p+1}{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{|A_{22}|^{-1}}\exp\left(-\frac{1}{2}a'_{(1)}A_{22}^{-1}a_{(1)}\right)}{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}$$

$$\cdot\frac{|A_{22}|^{\frac{\nu-p}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,A_{22}\right)}{2^{\frac{\nu(p-1)}{2}}\pi^{\frac{(p-1)(p-2)}{4}}\prod_{i=1}^{p-1}\Gamma\left(\frac{\nu-i+1}{2}\right)},\quad 当u>0$$

其中 $u=a_{11}-a'_{(1)}A_{22}^{-1}a_{(1)}$，由引理知 $u=\frac{|A|}{|A_{22}|}$，将 $(u, a'_{(1)}, A_{22})\to(a_{11},\ a'_{(1)},\ A_{22})$，$|J|=1$，得

$(a_{11},\ a'_{(1)},\ A_{22})$ 即 A 的密度。

2. 再考虑一般正定阵 Σ 情况。

对正定阵 Σ，有非异方阵 B 使 $B\Sigma B'=I$，而

$$BAB'=\sum_{a=1}^{\nu}By_a(By_a)'$$

因 $By_a \sim N_p(0, I)$，于是$A^* = BAB' \sim W_p(\nu, I)$，已知 A^* 密度，而A密度为

$$\frac{|BAB'|^{\frac{1}{2}(\nu-p-1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\text{tr } BAB'\right)}{2^{\frac{\nu p}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left(\frac{\nu-i+1}{2}\right)} \left| |B|^{p+1} \right|$$

因 $B\Sigma B' = I$，故 $B'B = \Sigma^{-1}$，$\text{tr } BAB' = \text{tr } AB'B = \text{tr} A\Sigma^{-1}$，又因$|B||\Sigma||B'| = 1$，故

$$|B| = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left| |B|^{\nu-p-1+(p+1)} \right| = |\Sigma|^{-\frac{\nu}{2}}$$

代入得证。

当 $p=1$ 时，Σ 为 I 时，$A \sim \chi^2(\nu)$，故Wishart 分布为 χ^2 分布推广。

性质 2 若 $A \sim W_p(\nu, \Sigma)$，则其特征函数（指$a_{11}, \cdots, a_{pp}, 2a_{12}, \cdots, 2a_{p-1,p}$ 特征函数）

$$Ee^{i\text{tr}(A\theta)} = \frac{|\Sigma^{-1}|^{\frac{\nu}{2}}}{|\Sigma^{-1} - 2i\theta|^{\frac{\nu}{2}}} = \frac{1}{|I - 2i\Sigma\theta|^{\frac{\nu}{2}}}$$

其中 θ 为 $p \times p$ 实对称阵。

证

$$Ee^{i\text{tr}A\theta} = Ee^{i\text{tr}\Sigma y_a y_a'\theta} = Ee^{i\text{tr}\Sigma y_a'\theta y_a}$$
$$= Ee^{i\Sigma y_a'\theta y_a} = \prod Ee^{iy_a'\theta y_a}$$
$$= (Ee^{iy_a'\theta y_a})^{\nu}$$

因 θ 为实对称阵，$\Sigma > 0$，故由第二章第九节性质 4，知有非异方阵 B 使

$$B'\Sigma^{-1}B = I$$

$$B'\theta B=\Lambda \quad (\Lambda\text{对角阵})$$

作 $y_a=BZ$，则

$$Eei y_a'\theta y_a=Eei Z\Lambda Z=Eei\Sigma\lambda_i z_i^2=\prod Eei\lambda_i z_i^2$$

因 $Z=B^{-1}y_a$，故 $z_i\sim N(0,\ 1)$独立，而

$$Ee^{i\lambda_i z_i^2}=(1-2i\lambda_i)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Eei y_a'\theta y_a=|I-2i\Lambda|^{-\frac{1}{2}}$$

且

$$|B\Sigma^{-1}B'|=1$$

$$|B|^2=1/|\Sigma^{-1}|$$

故

$$\begin{aligned}|I-2i\Lambda|&=|B'\Sigma^{-1}B-2iB'\theta B|\\&=|B|^2|\Sigma^{-1}-2i\theta|\\&=\frac{|\Sigma^{-1}-2i\theta|}{|\Sigma^{-1}|}\end{aligned}$$

$$Ee^{i\operatorname{tr}A\theta}=\frac{|\Sigma^{-1}|^{\nu/2}}{|\Sigma^{-1}-2i\theta|^{\nu/2}}=\frac{1}{|I-2i\Sigma\theta|^{\nu/2}}$$

性质 3 若 $y_a\sim N_p(\mu,\ \Sigma)$独立，则

（1） $A=\sum_{a=1}^{n}(y_a-\bar{y})(y_a-\bar{y})'=\sum_{a=1}^{n-1}z_a z_a'$

其中 $z_a\sim N_p(0,\ \Sigma)$独立$(a=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$；

（2） $\bar{y}$ 与A独立；

（3） 若Σ正定，则 $A\sim W_p(n-1,\ \Sigma)$。

证 取正交阵

$$D=\begin{pmatrix}d_{11} & \cdot & d_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ d_{n-1,1} & \cdot & d_{n-1,n}\\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdot & \frac{1}{\sqrt{n}}\end{pmatrix}$$

作变换

$$z_\alpha=\sum_{j=1}^{n}d_{\alpha j}y_j$$

即

$$(z_1,\ \cdot,\ z_n)=(y_1,\ \cdot,\ y_n)D'$$

则

$$Ez_n=E\Sigma\frac{1}{\sqrt{n}}y_j=\sqrt{n}\mu$$

$$Ez_\alpha=E\Sigma d_{\alpha j}y_j=\Sigma d_{\alpha j}\mu$$

$$=\sqrt{n}\mu\Sigma d_{\alpha j}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,\ (\alpha\neq n)$$

$$\text{cov}(z_\alpha,\ z_\beta)=E(z_\alpha-Ez_\alpha)(z_\beta-Ez_\beta)'$$

$$=\sum_{\delta=1}^{n}d_{\alpha\delta}d_{\beta\delta}E(y_\delta-\mu)(y_\delta-\mu)'$$

$$=\begin{cases}0, & \alpha\neq\beta\\ \Sigma, & \alpha=\beta\end{cases}$$

故 z_α，$(\alpha=1,\ \cdots,\ n)$独立。且

$$z_n\sim N_p(\sqrt{n}\mu,\ \Sigma)$$

$$z_\alpha\sim N_p(0,\ \Sigma),\ (\alpha\neq n)$$

$$A=\sum_{\alpha=1}^{n}(y_\alpha-\bar{y})(y_\alpha-\bar{y})'=\sum_{\alpha=1}^{n}y_\alpha y_\alpha'-n\bar{y}\bar{y}'$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n}z_\alpha z_\alpha'-z_nz_n'=\sum_{\alpha=1}^{n-1}z_\alpha z_\alpha'$$

由 z_α 独立，故$\bar{y}=\frac{1}{\sqrt{n}}z_n$ 与 A独立。

性质 4　若 $y_\alpha \sim N(0,\ \Sigma)$，$\Sigma$正定，$y_\alpha$独立，又$a>0$，$A=\Sigma y_\alpha y_\alpha' \sim W(\nu,\ \Sigma)$则

$$aA \sim W(\nu,\ a\Sigma)$$

证　令 $z_\alpha=\sqrt{a}\, y_\alpha \sim N(0,\ a\Sigma)$，则 $aA=\sum\limits_\alpha(\sqrt{a}\, y_\alpha)(\sqrt{a}\, y_\alpha)'$

性质 5　若 $A_1 \sim W_p(\nu_1,\ \Sigma)$，$A_2 \sim W_p(\nu_2,\ \Sigma)$独立，则 $A_1+A_2 \sim W_p(\nu_1+\nu_2,\ \Sigma)$

此由特征函数可证。

性质 6　若 $A \sim W_p(\nu,\ \Sigma)$且

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} q\ 行 \\ p-q 行 \end{matrix}$$

则 $A_{11} \sim W_q(\nu,\ \Sigma_{11})$，$A_{22} \sim W_{p-q}(\nu,\ \Sigma_{22})$，其中 Σ_{ii} 为相应分块。

当 $\Sigma_{12}=0$，则 A_{11} 与 A_{12}独立。

性质 7　若$A \sim W_p(\nu,\ \Sigma)$，$B=\underset{qp}{C}AC'$（C秩为q），则$B \sim W_q(\nu,\ C\Sigma C')$

证　因 $CAC'=C(\Sigma y_\alpha y_\alpha')C'=\Sigma(Cy_\alpha)(Cy_\alpha)'$ 又 $Cy_\alpha \sim N_p(0,\ C\Sigma C')$。

第六节　Hotelling分布

定义　若$A \sim W_p(\nu,\ \Sigma)$，$t \sim N_p(\mu,\ \Sigma)$独立，则称

$$T^2=\nu t' A^{-1} t$$

为自由度为ν的 Hotelling 分布 $T^2(p,\ \nu,\ \mu)$。

引理　设 $y_i \sim N_p(0,\ \Sigma)$，Σ 正定，而 $A=\Sigma y_i y_i' \sim W_p$

$(\nu,\ \Sigma)$，记 $\Sigma^{-1}=(\sigma^{ij})$，$A^{-1}=(a^{ij})$则

（1） $\sigma^{pp}/a^{pp}\sim\chi^2(\nu-p+1)$且与$(a_{ij})$，$i$，$j=1$，…，$p-1$独立

（2） 若 l 为 p 维列向量，则

$$l'\Sigma^{-1}l/l'A^{-1}l\sim\chi^2(\nu-p+1)$$

证 记

$$y_t=\begin{pmatrix} y_{t1}\\ \vdots \\ y_{t,p-1}\\ \hline y_{tp}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix} y_{tI}\\ y_{tp}\end{pmatrix}$$

由第八章第七节知，给定 y_{tI} 时，y_{tp} 的条件分布为 $N\left(\beta' y_{tI},\ \frac{1}{\sigma^{pp}}\right)$，且 y_{tI} 与 $y_{tp}-\beta' y_{tI}$ 独立，又

$$\begin{aligned}Q_0&=\min_\beta \Sigma(y_{tp}-\beta' y_{tI})^2\\&=\min_\beta(Y_p-\tilde{Y}\beta)'(Y_p-\tilde{Y}\beta)\\&=Y_p'\{I-\tilde{Y}(\tilde{Y}'\tilde{Y})^{-1}\tilde{Y}'\}Y_p\end{aligned}$$

上式为 $\chi^2(\nu-p)/\sigma^{pp}$ 分布，其中

$$\tilde{Y}=\begin{pmatrix} y_{11} & \cdot & y_{1,p-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ y_{\nu 1} & \cdot & y_{\nu,p-1}\end{pmatrix},\quad Y_p=\begin{pmatrix} y_{1p}\\ \cdot\\ y_{\nu p}\end{pmatrix}$$

当 $n>p-1$ 即 $n\geqslant p$ 时

$$A=\begin{pmatrix}\tilde{Y}'\tilde{Y} & \tilde{Y}'Y_p\\ Y_p'\tilde{Y} & Y_p'Y_p\end{pmatrix}$$

故

$$\begin{aligned}|A|&=|\tilde{Y}'\tilde{Y}|\cdot\{Y_p'Y_p-Y_p'\tilde{Y}(\tilde{Y}'\tilde{Y})^{-1}\tilde{Y}'Y_p\}\\&=|\tilde{Y}'\tilde{Y}|\cdot\{Y_p'(I-\tilde{Y}(\tilde{Y}'\tilde{Y})^{-1}\tilde{Y}')Y_p\}\end{aligned}$$

而

$$\frac{1}{Q_0}=\frac{|\widetilde{Y}'\widetilde{Y}|}{|A|}=a^{pp}$$

$$\frac{\sigma^{pp}}{a^{pp}}\sim\chi^2(\nu-p+1)$$

这里条件分布不含$\widetilde{Y}$，故与$\widetilde{Y}$独立，从而与a_{ij}，i，$j=1, 2, \cdots, p-1$独立。

以y_i任一分量y_{ij}代y_{ip}，亦有

$$\frac{\sigma^{jj}}{a^{jj}}\sim\chi^2(\nu-p+1)$$

（2） 取$\|l\|=1$，命B为$p\times p$阶正交阵，l'为其第p行，则

$$BAB'\sim W_p(\nu, B\Sigma B')$$

由（1），因$(BAB')^{-1}=BA^{-1}B'$，$(B\Sigma B')^{-1}=B\Sigma^{-1}B'$，由$B$作法，知$BA^{-1}B'$与$B\Sigma^{-1}B'$的$p$个主对角元素分别为$l'A^{-1}l$与$l'\Sigma^{-1}l$，故

$$l'\Sigma^{-1}l/l'A^{-1}l\sim\chi^2(\nu-p+1)$$

性质1 若$A\sim W_p(\nu,\Sigma)$，$t\sim N_p(\mu, \Sigma)$，则对Hotelling分布变量

$$T^2=\nu t'A^{-1}t$$

有

$$\frac{\nu-p+1}{p}\cdot\frac{T^2}{\nu}\sim F(p, \nu-p+1, \mu'\Sigma^{-1}\mu)$$

证

$$T^2=\nu\frac{t'A^{-1}t}{t'\Sigma^{-1}t}\cdot t'\Sigma^{-1}t$$

又

$$\frac{t'\Sigma^{-1}t}{t'A^{-1}t}\sim\chi^2(\nu-p+1)$$

的分布不含 t，故与 t 独立。

且 $t \sim N_p(\mu, \Sigma)$，而 $t'\Sigma^{-1}t \sim \chi^2(p, \mu'\Sigma^{-1}\mu)$，得证。

我们知道，方差定义为

$$\Sigma = E\begin{pmatrix} y_1 - Ey_1 \\ \cdot \\ y_p - Ey_p \end{pmatrix}(y_1 - Ey_1, \ \cdot, \ y_p - Ey_p)$$

取残差向量平方和

$$A = \begin{pmatrix} y_{11} - \bar{y}_1 \\ \cdot \\ y_{1p} - \bar{y}_p \end{pmatrix}(y_{11} - \bar{y}_1, \ \cdot, \ y_{1p} - \bar{y}_p) + \cdots$$

$$+ \begin{pmatrix} y_{n1} - \bar{y}_1 \\ \cdot \\ y_{np} - \bar{y}_p \end{pmatrix}(y_{n1} - \bar{y}_1, \ \cdot, \ y_{np} - \bar{y}_p)$$

$A \sim W$ 分布，而样本方差为 $\frac{1}{n-1}A$.

性质 2 若 x_α 为取自 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的独立样本，且

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\Sigma x_\alpha$$

$$S = \frac{1}{n-1}A = \frac{1}{n-1}\Sigma(x_\alpha - \bar{x})(x_\alpha - \bar{x})'$$

$$T^2 = n(\bar{x} - \mu_0)'S^{-1}(\bar{x} - \mu_0)$$

其中 μ_0 为已知向量，则 T^2 为自由度 $n-1$ 的 Hotelling分布 $T^2(p, n-1, \sqrt{n}(\mu - \mu_0))$，且

$$\frac{T^2}{n-1} \cdot \frac{n-p}{p} \sim F(p, n-p, \ n(\mu - \mu_0)'\Sigma^{-1}(\mu - \mu_0))$$

证 令

$$y = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)$$

则

$$T^2=(n-1)y'A^{-1}y$$

因 $y\sim N_p(\sqrt{n}(\mu-\mu_0),\ \Sigma)$，$A\sim W_p(n-1,\ \Sigma)$独立，得证。

第七节 相关系数分布

我们知道，二维随机向量$(\xi,\ \eta)$的相关系数

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi\sigma_\eta}$$

若对$(\xi,\ \eta)$测得$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_n,\ y_n)$，则样本相关系数

$$r=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2\cdot\Sigma(y_i-\bar{y})^2}}$$

性质1 若 $x_\alpha(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是来自 $N_2(\mu,\ \Sigma)$ 样本，而

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

则样本相关系数 r 密度为

$$\frac{2^{n-3}(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}}{(n-3)!\pi}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{2\rho r}{\alpha!}\right)^\alpha\Gamma^2\left(\frac{n-1+\alpha}{2}\right)$$

证 作

$$A=\sum_{\alpha=1}^{n}(x_\alpha-\bar{x})(x_\alpha-\bar{x})'\sim W_2(n-1,\ \Sigma)$$

其密度为

$$\frac{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)^{\frac{n-4}{2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{a_{11}}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{a_{12}}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{a_{22}}{\sigma_2^2}\right)\right\}}{2^{n-1}(\sigma_1^2\sigma_2^2-\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$$

令 $r=a_{12}/\sqrt{a_{11}a_{22}}$，则$(a_{11}, a_{22}, r)$密度为

$$\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}\,a_{11}^{\frac{n-4}{2}}\,a_{22}^{\frac{n-4}{2}}\,(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}}{2^{n-1}\sigma_1^{n-1}\sigma_2^{n-1}(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{a_{11}}{\sigma_1^2}-2\rho r\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{a_{22}}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

代入

$$\exp\left\{\frac{\rho r}{1-\rho^2}\cdot\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}}{\sigma_1\sigma_2}\right\}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\rho r}{1-\rho^2}\cdot\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}}{\sigma_1\sigma_2}\right)^{\alpha}$$

将 a_{11}，a_{22} 从 0 至∞积分，即得 r 密度。

性质 2 在性质 1 中，若 $\rho=0$，则 r 密度为

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\sqrt{\pi}}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}$$

证 r 密度为

$$\frac{2^{n-3}}{(n-3)!\pi}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\;\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

令 $y=\frac{n-2}{2}$，因

$$\Gamma(y)\Gamma\left(y+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(2y)}{2^{2y-1}}$$

$$\Gamma(n-2)=\frac{2^{n-3}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

代入得证。

性质 3 同性质 2 条件，则

$$t=\sqrt{n-2}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sim t(n-2)$$

证 因

$$dr=\frac{1}{\sqrt{n-2}}\sqrt{(1-r^2)^3}\,dt$$

$$1-r^2=\frac{n-2}{t^2+(n-2)}$$

故 t 密度为

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-2}}\left(\frac{n-2}{t^2+(n-2)}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$=\{\pi(n-2)\}^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-2}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

即 $t(n-2)$ 密度。

第八节 T²应 用

我们可用Hotelling分布对多维向量作检验与分析[10][24]。

1. 平均值向量的置信域

设 $x_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 是来自$N_p(\mu,\Sigma)$的样本，令

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha$$

$$S=\frac{1}{n-1}\sum_{\alpha=1}^{n}(x_\alpha-\bar{x})(x_\alpha-\bar{x})'$$

则因

$$n(\bar{x}-\mu)'S(\bar{x}-\mu)\sim T^2(p,n-1,0)$$

或

$$\frac{n-p}{p}\cdot\frac{1}{n-1}n(\bar{x}-\mu)'S^{-1}(\bar{x}-\mu)$$

$$\sim F(p,n-p)$$

查出F分布临界值F_α，则

$$\frac{n-p}{p}\cdot\frac{1}{n-1}n(\bar{x}-\mu)'S^{-1}(\bar{x}-\mu)$$

$$\leqslant F_\alpha(p,n-p)$$

的概率为$1-\alpha$，即μ的置信域是以$\bar{x}$为中心，形状依赖于S，大小依赖于α的椭球。

此法亦可检验x与μ有否差异，若无差异则

$$\frac{n-p}{p}\cdot\frac{1}{n-1}n(\bar{x}-\mu)'S^{-1}(\bar{x}-\mu)$$

应不大于$F_\alpha(p,n-p)$

2. **检验两向量是否相等**

设x_α是来自$N_p(\mu_1,\Sigma)$的容量n_1的样本，y_α是来自$N_p(\mu_2,\Sigma)$的容量n_2的样本，设两样本独立。现对零假设H_0：$\mu_1=\mu_2$作检验。

令

$$\bar{x}=\frac{1}{n_1}\sum_{\alpha=1}^{n_1}x_\alpha$$

$$\bar{y}=\frac{1}{n_2}\sum_{\alpha=1}^{n_2}y_\alpha$$

$$S=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n_1}(x_\alpha-\bar{x})(x_\alpha-\bar{x})'\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha=1}^{n_2}(y_\alpha-\bar{y})(y_\alpha-\bar{y})'\right\}$$

因

$$\bar{x}\sim N_p\left(\mu_1,\ \frac{1}{n_1}\Sigma\right)$$

$$\bar{y}\sim N_p\left(\mu_2,\ \frac{1}{n_2}\Sigma\right)$$

$$A_1=\sum_{\alpha=1}^{n_1}(x_\alpha-\bar{x})(x_\alpha-\bar{x})'\sim W_p(n_1-1,\Sigma)$$

$$A_2=\sum_{\alpha=1}^{n_2}(y_\alpha-\bar{y})(y_\alpha-\bar{y})'\sim W_p(n_2-1,\Sigma)$$

且$\bar{x}$与A_1独立，$\bar{y}$与A_2独立，故$(\bar{x},\bar{y})$与S独立，又因

$$\left(\frac{n_1\ n_2}{n_1+n_2}\right)^{\frac{1}{2}}(\bar{x}-\bar{y})\sim N_p\left(\left(\frac{n_1\ n_2}{n_1+n_2}\right)^{\frac{1}{2}}(\mu_1-\mu_2),\Sigma\right)$$

故

$$(n_1+n_2-2)S=A_1+A_2\sim W_p(n_1+n_2-2,\Sigma)$$

$$\tilde{T}^2=\frac{n_1n_2(n_1+n_2-p-1)}{p(n_1+n_2)(n_1+n_2-2)}(\bar{x}-\bar{y})'S^{-1}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\sim F(p,n_1+n_2-p-1,\ \frac{n_1n_2}{n_1+n_2}$$

$$\cdot(\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2))$$

当H_0成立时，分布为F分布（此时非中心参数为0），于是由F分布表确定F_α，按$\tilde{T}^2 < F_\alpha$或$\tilde{T}^2 \geqslant F_\alpha$决定是否取$H_0$。

例1 为检验某化验员测量时是否有系统误差，今测量

$$\mu=(22.75,\ 32.75,\ 51.50,\ 61.50)'$$

的某物21次，得

$$x_a=(x_{a1},\ x_{a2},\ x_{a3},\ x_{a4}),\quad a=1,2,\cdots,21 \quad 如下$$

x_{ai} \ a	1	2	3	4	5	6	7
x_{a1}	22.88	22.74	22.60	22.93	22.74	22.53	22.67
x_{a2}	32.81	32.56	32.74	32.95	32.74	32.53	32.58
x_{a3}	51.51	51.49	51.50	51.17	51.45	51.36	51.44
x_{a4}	61.51	61.39	61.22	60.91	61.56	61.22	61.30

x_{ai} \ a	8	9	10	11	12	13	14
x_{a1}	22.74	22.62	22.67	22.82	22.67	22.81	22.67
x_{a2}	32.67	32.57	32.67	32.80	32.67	32.67	32.60
x_{a3}	51.44	51.23	51.64	51.32	51.21	51.43	51.30
x_{a4}	61.30	61.39	61.50	60.97	61.49	61.15	61.27

x_{ai} \ a	15	16	17	18	19	20	21
x_{a1}	22.81	23.02	23.02	23.15	22.88	23.16	23.13
x_{a2}	33.02	33.05	32.95	33.15	33.06	32.78	32.95
x_{a3}	51.70	51.48	51.55	51.58	51.54	51.48	51.58
x_{a4}	61.49	61.44	61.62	61.66	61.54	61.41	61.68

此时欲检验测量值与μ有否差异。

作

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} 22.82 \\ 32.79 \\ 51.45 \\ 61.38 \end{pmatrix},\quad \bar{x}-\mu=\begin{pmatrix} 0.07 \\ 0.04 \\ -0.05 \\ -0.12 \end{pmatrix}$$

$$A=\sum_{\alpha=1}^{21}(x_\alpha-\bar{x})(x_\alpha-\bar{x})'$$

$$=\begin{pmatrix} 0.702 & 0.541 & 0.184 & 0.253 \\ 0.541 & 0.712 & 0.228 & 0.258 \\ 0.184 & 0.228 & 0.392 & 0.346 \\ 0.253 & 0.258 & 0.346 & 0.806 \end{pmatrix}$$

算

$$T^2=n(\bar{x}-\mu)'\left(\frac{A}{n-1}\right)^{-1}(\bar{x}-\mu)=15.576$$

$$F=\frac{21-4}{4}\cdot\frac{1}{21-1}T^2=3.31$$

令$F=3.31>F_{0.05}(4,17)=2.96$，故测量值与$\mu$有差异，从而该化验员有系统误差。

例2 欲检验两地区某矿物是否相同，对该矿物在两地区各取30块样品，对其6个项目进行化学分析测得含量数据如下：

求出甲地区及乙地区平均值向量$\bar{x}$及$\bar{y}$为

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} 401.40 \\ 37.57 \\ 27.67 \\ 38.30 \\ 32.83 \\ 32.10 \end{pmatrix},\quad \bar{y}=\begin{pmatrix} 355.17 \\ 62.73 \\ 12.47 \\ 21.17 \\ 8.27 \\ 22.37 \end{pmatrix}$$

算得$S=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n_1}(x_\alpha-\bar{x})(x_\alpha-\bar{x})'\right.$

a	甲地区						乙地区					
	x_{a1}	x_{a2}	x_{a3}	x_{a4}	x_{a5}	x_{a6}	y_{a1}	y_{a2}	y_{a3}	y_{a4}	y_{a5}	y_{a6}
1	417	47	23	27	13	37	200	50	10	25	7	20
2	500	50	30	35	20	35	200	43	11	23	6	11
3	500	50	40	35	20	35	450	60	10	20	8	20
4	500	70	20	30	8	30	200	50	10	25	7	20
5	500	70	20	30	8	30	200	50	10	25	7	20
6	500	50	40	35	20	35	333	83	13	22	9	23
7	210	30	9	20	25	40	150	41	10	20	9	22
8	265	35	6	55	45	29	150	41	10	20	9	22
9	200	60	10	50	30	40	450	60	10	20	8	20
10	200	60	10	50	30	40	450	60	10	20	8	20
11	500	23	32	33	27	25	283	73	11	25	7	23
12	500	23	32	33	27	25	383	80	12	23	9	22
13	232	5	9	32	38	9	350	86	11	24	10	34
14	232	5	9	32	38	9	150	41	10	20	9	22
15	217	25	19	33	29	25	300	100	10	25	10	30
16	100	43	10	30	24	55	490	57	34	16	7	39
17	286	16	17	51	57	38	500	60	10	15	7	1
18	250	1	20	50	55	1	500	60	10	15	7	1
19	250	1	20	50	55	1	300	6	11	23	10	25
20	500	1	40	40	60	30	350	85	10	18	10	30
21	333	17	40	50	50	30	400	80	10	23	10	28
22	450	22	38	38	50	40	490	57	34	16	7	39
23	400	63	53	53	20	53	500	60	10	15	7	1
24	650	50	20	35	50	25	550	73	11	17	7	27
25	650	50	20	35	50	25	425	75	11	24	8	28
26	450	50	50	40	25	50	350	85	10	18	10	30
27	450	50	50	40	25	50	400	80	10	23	10	28
28	600	50	53	27	30	40	451	31	25	30	9	15
29	400	50	50	50	26	53	450	80	10	20	8	20
30	800	60	30	30	30	30	250	75	10	25	8	30

$$+\sum_{\alpha=1}^{n_2}(y_\alpha-\bar{y})(y_\alpha-\bar{y})'\Big\}$$为

$$S=\begin{pmatrix} 21156.37 & 1064.80 & 799.41 & -159.37 & -159.37 & 37.33 \\ & 436.99 & 22.90 & -16.72 & -110.22 & 124.88 \\ & & 136.52 & 3.58 & -20.06 & 60.05 \\ & & & 51.46 & 32.45 & 3.83 \\ & & & & 111.04 & -45.34 \\ & & & & & 143.79 \end{pmatrix}$$

以上S仅写出上三角部分，其余部分由S对称而可写出。

算得

$$\widetilde{T}^2=\frac{n_1n_2(n_1+n_2-p-1)}{p(n_1+n_2)(n_1+n_2-2)}(\bar{x}-\bar{y})'S^{-1}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$=20.63$$

查$F(6,53)$在$\alpha=0.05$时临界值$F_\alpha=2.28$，因

$$\widetilde{T}^2>2.28$$

故拒绝两向量相等的假设，即两地区矿物不能认为相同。

第十二章　经验公式中的分布

第一节　引　　言

在计量和其它科学中，为了研究各量关系，进行大量测量以获得很多数据，然后通过数据处理，得到我们所须要的信息。

我们经常测量两个量的对应值，通过曲线拟合找出这两个量的关系。曲线拟合的关键问题是表征两量关系的经验公式类型选取，一俟类型选取完成后，即可用最小二乘法决定经验公式的参数。

两量经验公式类型的选取可以依靠专业知识，通过分析判断它们具有何种关系，但是我们经常面临刚开始对这些量进行研究，其间的物理关系尚不明确，此时更多需要借助于数学知识来解决这一问题。

这一问题的数学提法为：已测得

$$(x_i, y_i),\ i=1,2,\cdots,n$$

如何决定$y=f(x)$中函数类型f？为此，可将(x_i, y_i)作图后与典型图形对比，也可用表差法判断函数类型，但这些方法都有近似性。本章建立一种严格的计算方法，它在实际工作中已得到有效应用[1]。

第二节　拟合分布理论

由于两量关系$y=f(x)$可按台劳级数展开为幂级数，因

此下面研究经验公式为多项式的情况。此时对

$$(x_i,y_i),\ i=1,2,\cdots,n$$

配合曲线

$$y=\sum_{i=0}^{m}a_i x^i$$

如何决定多项式次数m？

下面研究拟合时用到的一些基本理论[4]。

我们知道，在最小二乘法中，若测得待求量$x_1, x_2,\cdots, x_t$的线性函数l_1，$l_2,\cdots,l_n$共$n\geqslant t$个，则对

$$\underset{t1}{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_t\end{pmatrix},\quad \underset{n1}{L}=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\ \vdots\\l_n\end{pmatrix}$$

可建立误差方程

$$\underset{nt}{A}\underset{t1}{X}=\underset{n1}{L}-\underset{n1}{V}$$

由$V'V=\min$，可得正规方程

$$A'AX=A'L$$

通常$R(A)=t$，故

$$X=(A'A)^{-1}A'L$$

将X代回误差方程，可求出V。

若(1)$L\sim N(AX_0=L_0,\ \sigma^2 I)$，即各测量值服从正态分布，等精度且无关，测量只有偶然误差（X_0，L_0为X，L真值）；(2)$R(A)=t\leqslant n$，则

$$\frac{\Sigma v_i^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-t)$$

$$\frac{x_i - x_{i0}}{\sqrt{q_{ii}\frac{\sum v_i^2}{n-t}}} \sim t(n-t)$$

而 q_{ii} 为 $(A'A)^{-1}=Q=(q_{ij})$ 主对角元素。

下面谈到二次型 $Q=Y'AY$ 的秩，它指其所对应的对称阵 A 的秩，即 $R(Q)=R(A)$。

性质1 若 $\underset{n1}{Y} \sim N(0,I)$，当 $Q_1,\cdots,Q_k$ 是 Y 的二次型 $(R(Q_i)=n_i)$，$Y'Y=Q_1+\cdots+Q_k$，则 $Q_i \sim \chi^2(n_i)$ 且独立的充要条件是 $n=\sum n_i$。

证

充分性：因对 Y 的任何二次型 $Y'AY(R(A)=m)$，由适当的线性变换均可化为 $\pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_m^2$。这由于 $\underset{nn}{A}$ 对称，故存在正交阵 F 使

$$F'AF=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $R(A)=m\leqslant n$，取

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda_1|} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{|\lambda_m|} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{-}=\begin{pmatrix} (\sqrt{|\lambda_1|})^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (\sqrt{|\lambda_m|})^{-1} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{-}\Lambda(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{-}=\begin{pmatrix} \pm 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \pm 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\triangleq\Delta$$

Δ中对角线上取$+1$或-1视λ_i为正或负而定。取

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}F'Y=X$$

则

$$Q=Y'AY=Y'F\Lambda^{\frac{1}{2}}\Delta\Lambda^{\frac{1}{2}}F'Y=X'\Delta X$$

故$Q_i=Y'A_iY\,(R(A_i)=n_i)$可化为

$$Q_i=\pm(b_{11}y_1+\cdots+b_{1n}y_n)^2\pm\cdots\pm(b_{n_i1}y_1+\cdots+b_{n_in}y_n)^2$$

如$n=\Sigma n_i$，则上述右端线性函数共n个，系数形成$\underset{nn}{B}=(b_{ij})$，但$\Sigma Q_i=Y'B'\Delta BY$（$\Delta$为对角阵，主对角元素为$+1$或$-1$），又

$$Y'Y=\Sigma Q_i=Y'B'\Delta BY\quad(\text{对所有}Y)$$

故$I=B'\Delta B$。因$R(I)=n$，故$R(B)=n$（若$R(B)>n$，则$R(I)<n$，有矛盾），于是$\Delta=(B')^{-1}B^{-1}$，而Δ正定，$\Delta=I$。因$(B')^{-1}B^{-1}=I$，故B^{-1}正交，于是B正交，从而$X=BY$

为正交变换。因$Y \sim N(0,I)$，故 $X \sim N(0,I)$，而Q_i为 n_i 个独立正态变量平方和，故$Q_i \sim \chi^2(n_i)$且独立。

必要性：$Y'Y = Q_1 + \cdots + Q_k$，今$Y'Y \sim \chi^2(n)$，特征函数为$(1-2it)^{-n/2}$，$Q_i \sim {}^2\chi(n_i)$，特征函数为$(1-2it)^{-n_i/2}$，Q_i独立，由

$$(1-2it)^{-n/2} = (1-2it)^{-\sum n_i/2}$$

得$n = \sum n_i$。

性质2 若$\underset{n1}{Y} \sim N(0,I)$，则二次型$Y'AY \sim \chi^2$的充要条件为$A$幂等，此时$\chi^2$自由度为$R(A) = \mathrm{tr}(A)$

证

充分性：$Y'Y = Y'AY + Y'(I-A)Y$，A幂等，$R(A) + R(I-A) = n$，由性质 1 得证。

必要性：存在正交阵C，当$Y = CX$，则

$$Y'AY \to X'C'ACX = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_m x_m^2$$

其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 为A的非 0 特征值。且

$$Y'Y \to X'X = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

因$x_j^2 \sim \chi^2(1)$，故x_j^2特征函数为$(1-2it)^{-\frac{1}{2}}$，而$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_m x_m^2$特征函数为$\{(1-2i\lambda_1 t)\cdots(1-2i\lambda_m t)\}^{-\frac{1}{2}}$，但$Y'AY \sim \chi^2$，若其自由度为$p$，则其特征函数为$(1-2it)^{-p/2}$，对比两特征函数，知$p = m$，$\lambda_i = 1$。

于是$C'AC$为对角阵，主对角元素为0 或 1从而幂等，因$C'AC = C'A^2C \Rightarrow A = A^2$故$A$幂等，且$Y'AY$ 自由度$p = m$为A之秩。

性质3 若$\underset{n1}{Y} \sim N(0,I)$，则对二次型$Q_1$及$Q_2$

(1) 若$Y'Y = Q_1 + Q_2$，当$Q_1 \sim \chi^2(a)$，则$Q_2 \sim \chi^2(n-a)$且与Q_1独立；

(2) 若$Q=Q_1+Q_2$，当$Q\sim\chi^2(a)$，$Q_1\sim\chi^2(b)$且Q_2非负，则$Q_2\sim\chi^2(a-b)$且与Q_1独立。

证

(1) 由性质2，若$Q_1=Y'AY$，则$A^2=A$，但

$$Q_2=Y'(I-A)Y$$

由$(I-A)^2=I-A$，故$I-A$幂等，得证。

(2) 因$Q\sim\chi^2(a)$，故存在正交变换$Y=CX$使$Q\to x_1^2+\cdots+x_a^2$，$Y'Y\to x_1^2+\cdots+x_n^2$，设$Q_1\to X'B_1X$，$Q_2\to X'B_2X$，则

$$x_1^2+\cdots+x_a^2=X'B_1X+X'B_2X$$

$X_1'B_1X$仍为$\chi^2(b)$，因正交变换后矩阵仍幂等且秩不变，于是由(1)得证。

第三节　拟合方法和步骤

若已测得(ξ_1,η_1)，(ξ_2,η_2)，…，(ξ_n,η_n)，为对它们配合

$$\eta=\sum_{i=0}^{m}b_i\xi^i$$

问多项式应配合多少次为宜？显然次数太低则拟合误差太大，次数太高则使用不便。

由第二节，设经验公式为$\eta=\sum\limits_{i=0}^{m}b_i\xi^i$，则由最小二乘法可解求$b_0$，$b_1$，…，$b_m$，若

$$L\sim N(L_0,\sigma^2I)$$

则拟合后残差平方和

$$(V'V)_m=\Delta'(I-A^*)\Delta,\ \ \Delta\sim N(0,\sigma^2I)$$

故$(V'V)_m/\sigma^2$为$\frac{\Delta}{\sigma}$所构成二次型$\left(\frac{\Delta}{\sigma}\sim N(0,I)\right)$，且

$$(V'V)_m/\sigma^2\sim\chi^2(n-(m+1))$$

同样若设经验公式为$\eta=\sum_{i=0}^{m+1}b_i\xi^i$，则

$$(V'V)_{m+1}/\sigma^2\sim\chi^2(n-(m+2))$$

因$m+1$次多项式包含m次多项式，故

$$(V'V)_{m+1}\leqslant(V'V)_m$$

但

$$(V'V)_m=(V'V)_{m+1}+\{(V'V)_m-(V'V)_{m+1}\}$$

由第二节性质3，知

$$\frac{(V'V)_m-(V'V)_{m+1}}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$$

且与$\frac{(V'V)_{m+1}}{\sigma^2}$独立，于是

$$F=\frac{(V'V)_m-(V'V)_{m+1}}{\sigma^2}\bigg/\frac{(V'V)_{m+1}}{\sigma^2(n-(m+2))}$$

$$\sim F(1,n-(m+2))$$

故若m次与$m+1$次皆足配，则$F\sim F(1,n-(m+2))$，从而F落于$F(1,n-(m+2))$临界值外为小概率事件。反之，若m次配合不足，则$(V'V)_m$较大，故F亦较大。

故得经验公式配合时次数决定步骤：

1. 设多项式为$\eta=\sum_{i=0}^{m}b_i\xi^i$，按最小二乘法配合$(\xi_i,\eta_i)$后算$(V'V)_m$；

2. 设多项式为$\eta=\sum_{i=0}^{m+1}b_i\xi^i$，按最小二乘法配合$(\xi_i,\eta_i)$

后算$(V'V)_{m+1}$；

3. 算

$$F=\frac{(V'V)_m-(V'V)_{m+1}}{(V'V)_{m+1}/(n-(m+2))}$$

4. 取显著性水平α，由F分布表查出$F_\alpha(1,n-(m+2))$；

5. 若$F<F_\alpha$，则m次已足；若$F\geqslant F_\alpha$，则m次不足，此时m须加1再用本步骤。

注意到：

1. 若η_i之权不等，上述步骤中只须以$V'PV$代$V'V$；

2. 以上步骤对类型为非多项式，但在原有逼近形基础上逐步增加项数时亦可。

第四节　拟合实例

下面叙述应用例子。

例1 为求力矩传感器与电流关系，将力用η表示，电流用ξ表示，测得(ξ_i,η_i)为

(6,1.220)，(7,1.416)，(8,1.616)，
(9,1.832)，(10,2.040)，(15,3.040)，
(20,4.063)，(25,5.046)，(30,6.078)，
(35,7.094)；

求$\eta=\sum_{i=0}^{m}b_i\xi^i$。

取$m=0$，得

$\eta_{(0)}=3.3445$，$(V'V)_0=40.244538$

取$m=1$，得

$$\eta_{(1)}=0.2040\xi+0.0049,\quad (V'V)_1=0.000739$$

为检验 0 次多项式$\eta_{(0)}$是否足配，算

$$F=\frac{40.244538-0.000739}{0.000739/(10-2)}=44\times10^4$$

取$a=0.05$，今$F>F_{0.05}(1,8)=5.32$，故$\eta_{(0)}$不足配。

取$m=2$，得

$$\eta_{(2)}=0.000001\xi^2+0.2020\xi+0.0078$$

$$(V'V)_2=0.000732$$

现检验1次多项式$\eta_{(1)}$是否足配，算

$$F=\frac{0.000739-0.000732}{0.000732/(10-3)}$$

$$=0.07<F_{0.05}(1,7)=5.59$$

故 1 次多项式已足配，而所求经验公式为

$$\eta=0.2040\xi+0.0049$$

例2 测得某金属棒温度t及对应长度l如下，问l对t的曲线为 2 次足否。

−0.92	0.716	0.10	2.270
−0.84	1.052	0.24	2.260
−0.66	1.512	0.38	2.078
−0.56	1.598	0.50	2.040
−0.50	1.767	0.62	1.829
−0.38	1.948	0.66	1.705
−0.26	2.157	0.92	1.134

今算$l=\sum_{i=0}^{m}b_it^i$，取$m=2$，有$(V'V)_2=0.0241$，取$m=3$，有$(V'V)_3=0.0240$，而

$$F=\frac{0.0241-0.0240}{0.0240/(14-4)}=0.0417<F_{0.05}(1,10)$$

$$=4.96$$

故长度与温度为二次关系已足，此时

$$l=2.27799+0.20749t-1.56834t^2$$

第十三章 粗差分布

第一节 顺序量分布

设连续型随机变量$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$相互独立并服从同一分布，这分布的分布函数为$F(x)$，分布密度为$f(x)$，将按大小从新排列的$\xi_i$记为$\zeta_i$，称它为$\xi_i$的顺序量，而

$$\zeta_1 \leqslant \zeta_2 \leqslant \cdots \leqslant \zeta_n$$

以$y_1, y_2, \cdots, y_n$表顺序量能取的值，现在来确定随机变量

$$(\zeta_{j_1}, \zeta_{j_2}, \cdots, \zeta_{j_r})$$

的分布，其中

$$1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n, \quad 1 < r \leqslant n$$

我们将x轴分成区间

$$I_1 = (-\infty, y_{j_1}], \ I_2 = (y_{j_1}, y_{j_2}], \cdots, I_{r+1} = (y_{j_r}, \infty)$$

要找所求的概率分布，只要对于任意$(y_{j_1}, y_{j_2}, \cdots, y_{j_r})$找出下列事件$A$的概率：$j_1 - 1$个$\xi$值落在$I_1$内，一个$\xi$值落在$(y_{j_1}, y_{j_1} + dy_{j_1})$由，$j_2 - j_1 - 1$个$\xi$值落在$I_2$内，一个$\xi$值落在$(y_{j_2}, y_{j_2} + dy_{j_2})$内等，最后$n - j_r$个$\xi$值落在$I_{r+1}$内。

以p_k表ξ取I_k内概率，即

$$p_k = \int_{I_k} f(x) \mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \cdots, r+1$$

ξ在区间$(y_{j_k}, y_{j_k} + dy_{j_k})$内概率等于$f(y_{j_k}) dy_{j_k}$，于是

$$(\zeta_{j_1},\zeta_{j_2},\cdots,\zeta_{j_r})$$

的概率元为[25]

$$P(A)$$

$$=n!\frac{p_1{}^{j_1-1}p_2{}^{j_2-j_1-1}\cdots p_r{}^{j_r-j_{r-1}-1}p_{r+1}{}^{n-j_r}}{(j_1-1)!1!(j_2-j_1-1)!1!\cdots(j_r-j_{r-1}-1)!1!(n-j_r)!}$$

$$f(y_{j_1})\cdots f(y_{j_r})dy_{j_1}\cdots dy_{j_r}$$

$$=g(y_{j_1},\cdots,y_{j_r})dy_{j_1}\cdots dy_{j_r} \tag{13.1}$$

因此，在区域$y_{j_1}<y_{j_2}<\cdots<y_{j_r}$内，

$$(\zeta_{j_1},\cdots,\zeta_{j_r})$$

的密度等于$g(y_{j_1},\cdots,y_{j_r})$，其它地方为0。

第二节　残差性质

为了得到更好的测量成果，在进行精密测量时，通常要作多次重复测量。如测某物理量的量值，一般不只测量一次，而是作多次独立测量，此时测得

$$x_1,\ x_2,\cdots,x_n$$

为了判定测量的质量，如是否包含粗差，是否含有系统误差，及算出评定精度所需要的标准差，我们需要比较测量值x_1，$x_2,\cdots,x_n$间关系，此时最有效的办法是计算残差.

$$v_i=x_i=\bar{x}$$

其中

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i$$

然后通过残差，我们可以用贝塞尔公式算出测量标准差

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma v_i{}^2}$$

下面进一步讨论利用残差决定测量中是否含有粗差，以判定测量结果中是否有包含粗差的异常值。

由于残差向我们提供着极其重要的信息，因而仔细分析残差性质是极其重要的基本工作[26]。

性质1 对某量测量，得

$$x_1,\ x_2,\cdots,x_n$$

算平均值$\bar{x}$及残差v_i

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i$$

$$v_i=x_i-\bar{x}$$

则任何

$$|v_i|\leqslant\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma v_i^2} \tag{13.2}$$

证 令

$$s_1=\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma v_i^2}$$

不妨记任一测量值为x_1，现研究

$$\frac{v_1}{s_1}=\frac{x_1-\bar{x}}{s_1}$$

对x_1，$x_2,\cdots,x_n$用正交变换将它变为y_1，y_2，…，y_n，其中头两个变量是

$$y_1=\sqrt{n}\ \bar{x}=\frac{x_1}{\sqrt{n}}+\frac{x_2}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{n}}$$

$$y_2=\sqrt{\frac{n}{n-1}}(x_1-\bar{x})=\sqrt{\frac{n-1}{n}}x_1$$

$$-\frac{x_2}{\sqrt{n(n-1)}}-\cdots-\frac{x_n}{\sqrt{n(n-1)}}$$

因正交变换保持距离不变，故$\Sigma x_i^2=\Sigma y_i^2$，而

$$ns_1^2=\Sigma v_i^2$$

$$=\Sigma(x_i-\bar{x})^2=\Sigma x_i^2-n\bar{x}^2$$

$$=\Sigma y_i^2-y_1^2=\sum_{i=2}^{n} y_i^2$$

$$\frac{x_1-\bar{x}}{s_1}=\frac{y_2}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} y_i^2}}$$

因

$$y_2^2\leqslant y_2^2+y_3^2+\cdots+y_n^2$$

$$|y_2|\leqslant\sqrt{\sum_{i=2}^{n} y_i^2}$$

于是

$$\left|\frac{v_1}{s_1}\right|=\left|\frac{x_1-\bar{x}}{s_1}\right|=\sqrt{n-1}\frac{|y_2|}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} y_i^2}}$$

$$\leqslant\sqrt{n-1}$$

$$|v_1|\leqslant\sqrt{n-1}s_1$$

$$\leqslant\sqrt{n-1}\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma v_i^2}$$

性质2 对某量进行独立测量，得

$$x_1,x_2,\cdots,x_n$$

且$x_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，算

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i$$

$$s_1=\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$$

则$\frac{x_i-\bar{x}}{s_1}$服从汤普森$\tau(n-2)$分布，其密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left(1-\frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}, & |x|\leqslant\sqrt{n-1}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{13.3}$$

证　无妨取x_i为x_1，则由第八章第五节汤普森分布即得本性质。

性质3　对某量测量，得

$$x_1,\ x_2,\cdots,x_n$$

算出

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i$$

$$v_i=x_i-\bar{x}$$

$$s_1=\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma v_i^2}$$

则

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}\leqslant\frac{\max v_i}{s_1}\leqslant\sqrt{n-1}\tag{13.4}$$

证　先将各v_i按大小排成顺序量

$$v_1\leqslant v_2\leqslant\cdots\leqslant v_n$$

因各x_i（从而各v_i）可放大同一倍数，而$\frac{v}{s}$不变，不妨取$v_n=1$，而

$$\frac{\max v_i}{s_1}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma v_i^2}}$$

(1) 先证$\max v_i/s_1 \leqslant \sqrt{n-1}$

因$\frac{\max v_i}{s_1}$极大与Σv_i^2极小等价，今讨论

$$f=\Sigma v_i^2$$
$$=1+v_{n-1}^2+\cdots+v_2^2+v_1^2$$

由$\Sigma v_i=0$，可研究v_1，$v_2,\cdots,v_{n-2}$之函数

$$f=1+(-1-v_{n-2}-\cdots-v_2-v_1)^2$$
$$+v_{n-2}^2+\cdots+v_2^2+v_1^2$$

由$\frac{\partial f}{\partial v_i}=0$，可解出极小点

$$v_1=v_2=\cdots=v_{n-2}=-\frac{1}{n-1}$$

从而$v_{n-1}=-\frac{1}{n-1}$，于是$\frac{\max v_i}{s_1}$之极大值为

$$1\Big/\sqrt{\frac{1}{n}\left\{1+\left(\frac{-1}{n-1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{-1}{n-1}\right)^2\right\}}=\sqrt{n-1}$$

若由性质1，因任一

$$|v_i|\leqslant\sqrt{n-1}\quad\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma v_i^2}=\sqrt{n-1}s_1$$

当然亦有v_i最大者

$$\max v_i\leqslant\sqrt{n-1}\,s_1$$

(2) 再证$\frac{1}{\sqrt{n-1}}\leqslant\frac{\max v_i}{s_1}$

因$v_n=1$最大且$\Sigma v_i=0$，故正数1最多$n-1$个，而其余

v_i最小值可取为$-(n-1)$，即其余v_i取值范围为$[-(n-1), 1]$。

对v_1，v_2，…，v_{n-2}之函数

$$f=1+(1+v_{n-2}+\cdots+v_2+v_1)^2$$
$$+v^2_{n-2}+\cdots+v_2^2+v_1^2$$

因它是凸函数，故当闭集内A，B，C三点满足坐标关系

$$x_C=\alpha x_A+(1-\alpha)x_B,\quad \alpha\in(0,1)$$

其中x_i为i点坐标，则

$$f_C<\alpha f_A+(1-\alpha)f_B$$

其中f_i为i点f之值。于是f只能在边界上取极大值。

当$n=3$

$$f=1+(1+v_1)^2+v_1^2$$

f定义域满足

$$v_1\in[-2,1]$$

此时v_1边界点与$v_2=-1-v_1$构成

$$(v_1,\ v_2)=(1,-2)$$
$$(v_1,\ v_2)=(-2,1)$$

当$n=4$

$$f=1+(1+v_2+v_1)^2+v_2^2+v_1^2$$

f定义域满足

$$v_1\in[-3,\ 1]$$
$$v_2\in[-3,\ 1]$$
$$-2\leqslant v_1+v_2\leqslant 2$$

(因$-3\leqslant-1-v_1-v_2\leqslant 1$)，故$v_3$与$v_1$，$v_2$边界点构成

$$(v_1,\ v_2,\ v_3)=(1,1,-3)$$
$$(v_1,\ v_2,\ v_3)=(1,-3,1)$$
$$(v_1,\ v_2,\ v_3)=(-3,1,1)$$

对于$n=n$时，f定义域满足

$$v_1\in[-(n-1),1]$$

……

$$v_{n-2}\in[-(n-1),\ 1]$$

$$-2\leqslant v_1+\cdots+v_{n-2}\leqslant n-2$$

（因$-(n-1)\leqslant-1-v_1-\cdots-v_{n-2}\leqslant1$），故$v_{n-1}$与$v_1$，…，$v_{n-2}$边界点构成

$$(v_1,\ v_2,\cdots,v_{n-2},\ v_{n-1})=(1,1,\cdots,1,-(n-1))$$

$$(v_1,\ v_2,\cdots,v_{n-2},\ v_{n-1})=(1,1,\cdots,-(n-1),1)$$

……

$$(v_1,\ v_2,\cdots,v_{n-2},\ v_{n-1})=(1,-(n-1),\cdots,1,1)$$

$$(v_1,\ v_2,\cdots,v_{n-2},\ v_{n-1})=(-(n-1),1,\cdots,1,1)$$

于是

$$f=1+(1+v_{n-2}+\cdots+v_2+v_1)^2$$
$$+v_{n-2}^2+\cdots+v_2^2+v_1^2$$

所取极大点为$(v_1,\ v_2,\cdots,v_{n-2},\ v_{n-1})$闭集的边界点，其极大值

$$f=1+1^2+1^2+\cdots+1^2+(n-1)^2$$

故$\frac{v_n}{s_1}$最小值即$\frac{\max v}{s_1}$最小值为

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}(1+1^2+1^2+\cdots+1^2+(n-1)^2)}}=\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

第三节　格拉布斯（Grubbs）标准

设对某量进行几次独立测量，得$x_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，将x_i排

成顺序量

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$$

作

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \Sigma x_i$$

则最大残差与 s_1 之比

$$\xi_n = \frac{x_{(n)} - \bar{x}_n}{\sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (x_{(i)} - \bar{x}_n)^2}} = \frac{\max v_i}{s_1}$$

记其分布函数为 $\tau_n(\lambda)$。

为研究 ξ_n，不失一般性，可研究 $x_i \sim N(0,1)$ 情况，且不考虑 $x_i = x_j$ 的情况[27][28]。

由于 x_i 排成 $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}$ 有 $n!$ 种情况，故

$$\tau_n(\lambda) = P(\xi_n < \lambda) = \frac{n!}{(2\pi)^{n/2}} \int_{D_n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{2}} dz_1 \cdots dz_n$$

其中

$$D_n: \ -\infty < z_1 < z_2 < \cdots < z_n < \bar{z}_n + s_n \lambda$$

$$\bar{z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z}_n)^2$$

作正交变换，$z_1, z_2, \cdots, z_n \to \bar{z}', y_1, \cdots, y_{n-1}$，而

$$z_1 = \frac{\bar{z}'}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{1.2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2.3}} y_2 - \cdots - \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} y_{n-1}$$

$$z_2=\frac{\bar{z}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{1.2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2.3}}y_2-\cdots-\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}y_{n-1}$$

$$z_3=\frac{\bar{z}'}{\sqrt{n}}\qquad\qquad+\frac{2}{\sqrt{2.3}}y_2-\cdots-\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}y_{n-1}$$

$$\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot$$

$$z_k=\frac{\bar{z}'}{\sqrt{n}}\quad+\frac{k-1}{\sqrt{(k-1)k}}y_{k-1}-\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}y_k-\cdots$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}y_{n-1}$$

$$\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot$$

$$z_n=\frac{\bar{z}'}{\sqrt{n}}\qquad\qquad\qquad+\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}}y_{n-1}$$

令

$$\bar{z}=\frac{\bar{z}'}{\sqrt{n}}$$

则变换成为

$$z_1=\bar{z}-\frac{1}{\sqrt{1.2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2.3}}y_2-\cdots\quad-\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}y_{n-1}$$

$$z_2=\bar{z}+\frac{1}{\sqrt{1.2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2.3}}y_2-\cdots\quad-\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}y_{n-1}$$

$$z_3=\bar{z}\qquad\qquad+\frac{2}{\sqrt{2.3}}y_2-\cdots\quad-\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}y_{n-1}$$

$$\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot$$

$$z_n=\bar{z}\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}}y_{n-1}$$

由正交变换得

$$\sum_{i=1}^{n}z_i^2=n\bar{z}^2+\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2,\quad \mathrm{d}\bar{z}'=\sqrt{n}\,\mathrm{d}\bar{z}$$

于是

$$\tau_n(\lambda)=\frac{n!\sqrt{n}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{D_n^*}e^{-\frac{1}{2}\left(n\bar{z}^2+\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2\right)}d\bar{z}\,dy_1\cdots dy_{n-1}$$

因

$$\sum_{i=1}^{n}z_i=n\bar{z}=n\frac{\bar{z}'}{\sqrt{n}}$$

故 $\bar{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i$ 与 $\bar{z}_n$ 一样，而

$$-\infty<\bar{z}<\infty$$

因z_i为顺序量

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1.2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{1.2}}\right)\right)y_1=z_2-z_1\Rightarrow y_1>0$$

$$z_{k+1}-z_k=\frac{k+1}{\sqrt{k(k+1)}}y_k-\frac{k-1}{\sqrt{(k-1)k}}y_{k-1}$$

$$\Rightarrow\sqrt{k+1}\,y_k>\sqrt{k-1}\,y_{k-1},\quad(k=2,3,\cdots,n-1)$$

$$z_n-\bar{z}_n=z_n-\bar{z}=z_n-\frac{\bar{z}'}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\,y_{n-1}<s_n\lambda$$

$$\Rightarrow y_{n-1}<\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2}\;\lambda=\lambda$$

$$\cdot\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2}$$

于是D^*_n确定于

$$-\infty<\bar{z}<\infty$$

$$y_1 > 0$$

$$\sqrt{k+1}\, y_k > \sqrt{k-1}\, y_{k-1}, \quad (k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$$

$$y_{n-1} < \lambda \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}$$

按z积分$\tau_n(\lambda)$，得

$$\tau_n(\lambda) = \frac{n!}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_{\Omega(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}\, dy_1 dy_2 \cdots dy_{n-1}$$

其中$\Omega(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1})$为$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1}$构成的相应域，

变至极坐标，即$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1} \to \sqrt{n}S,\ \varphi_{n-2}, \cdots,\ \varphi_1$，而

$$y_1 = \sqrt{n}S \cos\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-3} \cdots \cos\varphi_1$$

$$y_2 = \sqrt{n}S \cos\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-3} \cdots \sin\varphi_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_{n-2} = \sqrt{n}S \cos\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-3}$$

$$y_{n-1} = \sqrt{n}S \sin\varphi_{n-2}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = nS^2$$

故S即s_n

变换雅可比

$$J = (\sqrt{n}S)^{n-2} \cos^{n-3}\varphi_{n-2} \cos^{n-4}\varphi_{n-3} \cdots \cos\varphi_2$$

将$\tau_n(\lambda)$对S由0至∞积分，得

$$\tau_n(\lambda)=\frac{n!}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\Omega(\sqrt{n}S,\varphi_{n-2},\cdots,\varphi_1)} e^{-\frac{1}{2}nS^2}$$

$$\cdot(\sqrt{n}S)^{n-2}\cos^{n-3}\varphi_{n-2}\cdots\cos\varphi_2\, d(\sqrt{n}S)d\varphi_{n-2}\cdots d\varphi_1$$

因

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} t^n dt = 2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

故

$$\tau_n(\lambda)=\frac{n!\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_{D_{n-2}}\cos^{n-3}\varphi_{n-2}\cos^{n-4}\varphi_{n-3}\cdots$$

$$\cos\varphi_2\, d\varphi_{n-2}\cdots d\varphi_1$$

变换要求

$$0<\varphi_k<\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{y_2}{y_1}>\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \text{tg}\,\varphi_1=\frac{y_2}{y_1}>\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\text{tg}\,\varphi_k}{\sin\varphi_{k-1}}=\frac{y_{k+1}}{y_k}>\sqrt{\frac{k}{k+2}}\Rightarrow \text{tg}\,\varphi_k>$$

$$\sqrt{\frac{k}{k+2}}\sin\varphi_{k-1},(k=2,\cdots,n-2)$$

$$\sin\varphi_{n-2}=\frac{y_{n-1}}{\sqrt{n}S}<\frac{\lambda}{\sqrt{nS^2}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2}$$

$$=\frac{\lambda}{\sqrt{nS^2}}\sqrt{\frac{nS^2}{n-1}}=\frac{\lambda}{\sqrt{n-1}}$$

故D_{n-2}决定于

$$0<\varphi_k<\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1>\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_k>\sqrt{\frac{k}{k+2}}\sin\varphi_{k-1},\ (k=2,\cdots,n-2)$$

$$\sin\varphi_{n-2}<\frac{\lambda}{\sqrt{n-1}}$$

作变换

$$\sin\varphi_k=\frac{t_k}{\sqrt{k+1}},\ (k=1,2,\cdots,n-2)$$

则

（1） 求各t_i下限

因$\sin\varphi_1$随$\operatorname{tg}\varphi_1$增加而增加

$$t_1=\sqrt{2}\sin\varphi_1=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\Big/\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

当$n=2,3,\cdots,n-2$时

$$\operatorname{tg}\varphi_k=\sqrt{\frac{k}{k+2}}\sin\varphi_{k-1}$$

$$\sin\varphi_k=\sqrt{\frac{k}{k+2}}\sin\varphi_{k-1}\Big/\sqrt{1+\frac{k}{k+2}\sin^2\varphi_{k-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{k}\sin\varphi_{k-1}}{\sqrt{2+k+k\sin^2\varphi_{k-1}}}$$

$$t_k=\sqrt{k+1}\sin\varphi_k=\sqrt{k(k+1)}\frac{\sin\varphi_{k-1}}{\sqrt{2+k+k\sin^2\varphi_{k-1}}}$$

$$=\frac{\sqrt{k+1}\,t_{k-1}}{\sqrt{k+2+t_{k-1}^2}}$$

由于t_{k-1}下限当$k=2$时$t_{k-1}=\frac{1}{\sqrt{k}}$，故$t_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

(当$k=3$)，从而

$$t_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

对$k=2,3,\cdots,n-2$亦正确。

(2) 求各t_i上限

由

$$0<\varphi_k<\frac{\pi}{2}\Rightarrow t_k=\sqrt{k+1}\sin\varphi_k<\sqrt{k+1}$$

又

$$\sin\varphi_{k-1}<\sqrt{\frac{k+2}{k}}\operatorname{tg}\varphi_k$$

$$<\sqrt{\frac{k+2}{k}}\cdot\frac{t_k}{\sqrt{k+1}}\Big/\sqrt{1-\frac{t_k^2}{k+1}}$$

故得t_{k-1}积分上界

$$\lambda_k(t_k)=\min\left\{\sqrt{k},\ \sqrt{\frac{k+2}{k+1}}t_k\Big/\sqrt{1-\frac{t_k^2}{k+1}}\right\}$$

又

$$t_{n-2}=\sqrt{n-1}\sin\varphi_{n-2}<\lambda$$

注意到

$$\cos\varphi_k\,d\varphi_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}}dt_k$$

$$d\varphi_k=\frac{1}{\cos\varphi_k\sqrt{k+1}}dt_k$$

于是

$$\tau_n(\lambda)=\frac{n!\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\frac{1}{\prod_{k=1}^{n-2}\sqrt{k+1}}\int_{D_{n-2}}\cos^{n-4}\varphi_{n-2}$$

$$\cdot\cos^{n-5}\varphi_{n-3}\cdots\cos\varphi_3\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_2}\ \frac{1}{\cos\varphi_1}dt_{n-2}\cdots dt_1$$

$$=\frac{n!\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\prod_{k=1}^{n-2}\sqrt{k+1}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}^{\lambda}\left(1-\frac{t_{n-2}^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}dt_{n-2}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{n-2}}}^{\lambda_{n-2}(t_{n-2})}\left(1-\frac{t_{n-3}^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}}dt_{n-3}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{n-3}}}^{\lambda_{n-3}(t_{n-3})}\left(1-\frac{t_{n-4}^2}{n-3}\right)^{\frac{n-6}{2}}dt_{n-4}\cdots\int_{\frac{1}{\sqrt{4}}}^{\lambda_4(t_4)}\left(1-\frac{t_3^2}{4}\right)dt_3$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\lambda_3(t_3)}1dt_2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\lambda_2(t_2)}\left(1-\frac{t_1^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}dt_1 \qquad (13.5)$$

其中

$$\lambda_k(t_k)=\min\left\{\sqrt{k},\ \frac{\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}\,t_k}{\sqrt{1-\frac{t_k^2}{k+1}}}\right\}$$

设

$$\varphi_n(\lambda)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left(1-\frac{\lambda^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}$$

于是，当 λ 满足$\frac{1}{\sqrt{n-1}}<\lambda<\sqrt{n-1}$ 时

$$\tau_n'(\lambda)=n\varphi_n(\lambda)\,\tau_{n-1}(\delta_n(\lambda))$$

而

$$\delta_n(\lambda)=\min\left\{\sqrt{n-2},\ \frac{\sqrt{\frac{n}{n-1}}\lambda}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{n-1}}}\right\}$$

此外，当 $\lambda>\sqrt{n-1}$ 时，$\tau_n(\lambda)=1$；当 $\lambda<\frac{1}{\sqrt{n-1}}$时，$\tau_n(\lambda)=0$。

例如

（1） 当$n=2$，因

$$\frac{v_i}{\sqrt{\frac{1}{2}\ (v_i^2+v_j^2)}}\equiv 1$$

故

$$\tau_2(\lambda)=\begin{cases}0; & 当\ \lambda<1\\ 1, & 当\ \lambda\geqslant 1\end{cases}$$

（2） 当 $n=3$

$$\tau_3'(\lambda)=\begin{cases}\frac{3}{\pi\sqrt{2}}\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}, & 当\frac{1}{\sqrt{2}}<\lambda<\sqrt{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$\tau_3(\lambda)=\begin{cases}0, & 当\ \lambda<\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{3}{\pi}\arcsin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}, & 当\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\lambda<\sqrt{2}\\ 1, & 当\ \lambda\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$$

（3） 当 $n=4$

对应于 $\left(-\infty,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$，$(1,\sqrt{3})$，$(\sqrt{3},\infty)$

4个区间，$\tau_4(\lambda)$ 有不同形式。

一般$\tau_n(\lambda)$在如下$n-1$个分点间，有 $n-2$种形式：

$$\text{分点：}\ \underbrace{\sqrt{\frac{1}{n-1}},\ \sqrt{\frac{2}{n-2}}}_{\tau^{(\frac{n-2}{n})}(\lambda)},\ \cdots,\ \underbrace{\sqrt{\frac{n-(l+1)}{l+1}},\sqrt{\frac{n-l}{l}}}_{\tau^{(\frac{l}{n})}(\lambda)},$$

$\tau_n(\lambda)$：

$$\cdots,\ \underbrace{\sqrt{\frac{n-2}{2}},\ \sqrt{n-1}}_{\tau^{(\frac{1}{n})}(\lambda)}$$

今讨论各区间情况。

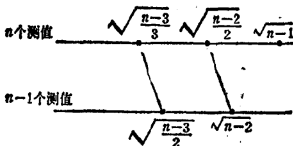


图13.1 格拉布斯标准中区间对应

（1） 当 $\lambda\in\left[\sqrt{\frac{n-2}{2}},\ \sqrt{n-1}\right]$

$$\delta_n(\lambda)=\sqrt{n-2}$$

$$\tau_{n-1}(\delta_n(\lambda))=1$$

$$\tau^{(\frac{1}{n})\prime}(\lambda)=n\varphi_n(\lambda)$$

$$1-\tau_n^{(2)}(\lambda)=\frac{n\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_{\lambda}^{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}dx$$

(2) 当 $\lambda\in\left[\sqrt{\frac{n-3}{3}},\ \sqrt{\frac{n-2}{2}}\right]$

$$\delta_n\left(\sqrt{\frac{n-3}{3}}\right)=\sqrt{\frac{n-3}{2}}$$

对$n-1$个测量值

$$\tau_{n-1}^{(1)}(\lambda)=1-\frac{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-2)}\,\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\int_{\lambda}^{\sqrt{n-2}}$$

$$\left(1-\frac{x^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}}dx$$

$$\tau_n^{(2)\prime}=n\varphi_n(\lambda)\,\tau_{n-1}^{(1)}(\delta_n(\lambda))$$

$$=n\varphi_n(\lambda)\left\{1-\frac{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-2)}\,\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\int_{\delta_n(\lambda)}^{\sqrt{n-2}}\right.$$

$$\left.\left(1-\frac{x^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}}dx\right\}$$

因

$$\tau_n^{(2)}(\lambda)+\int_{\lambda}^{\sqrt{\frac{n-2}{2}}}\tau_n^{(2)\prime}(\lambda)\,d\lambda+\int_{\sqrt{\frac{n-2}{2}}}^{\sqrt{n-1}}\tau_n^{(1)\prime}(\lambda)d\lambda$$

$$=1$$

$$\tau_n^{(2)}(\lambda)=1-\int_{\lambda}^{\sqrt{\frac{n-2}{2}}} n\varphi_n(\lambda)\left\{1-\frac{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-2)}\,\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\right.$$

$$\left.\int_{\delta_n(\lambda)}^{\sqrt{n-2}}\left(1-\frac{x^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}}dx\right\}d\lambda$$

$$-\int_{\sqrt{\frac{n-2}{2}}}^{\sqrt{n-1}} n\varphi_n(\lambda)d\lambda$$

故

$$1-\tau_n^{(2)}(\lambda)=\frac{n\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_{\lambda}^{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}dx$$

$$-\frac{n}{\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n-2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\int_{\lambda}^{\sqrt{\frac{n-2}{2}}}\left(1-\frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}dx$$

$$\int_{\delta_n(x)}^{\sqrt{n-2}}\left(1-\frac{y^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}}dy$$

（3） 当 $\lambda\in\left[\sqrt{\frac{n-4}{4}},\ \sqrt{\frac{n-3}{3}}\right]$

$$\delta_n\left(\sqrt{\frac{n-4}{4}}\right)=\sqrt{\frac{n-4}{3}}$$

对 $n-1$ 个测量值

$$\tau_{n-1}^{(2)}(\lambda)=1-\frac{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-2)}\,\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\int_{\lambda}^{\sqrt{n-2}}\left(1-\frac{x^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}}dx$$

$$-\frac{n-1}{\pi}\sqrt{\frac{n-2}{n-3}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}\int_{\lambda}^{\sqrt{\frac{n-3}{2}}}\left(1-\frac{x^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}}dx$$

$$\int_{\delta_{n-1}(x)}^{\sqrt{n-3}}\left(1-\frac{y^2}{n-3}\right)^{\frac{n-6}{2}}dy$$

$$\tau_n^{(3)\prime}(\lambda)=n\varphi_n(\lambda)\tau_{n-1}^{(2)}(\delta_n(\lambda))$$

$$\tau_n^{(3)}(\lambda)+\int_{\lambda}^{\sqrt{\frac{n-3}{3}}}\tau_3^{(3)\prime}(\lambda)d\lambda+\int_{\sqrt{\frac{n-3}{3}}}^{\sqrt{\frac{n-2}{2}}}\tau_n^{(2)\prime}(\lambda)d\lambda+$$

$$\int_{\sqrt{\frac{n-2}{2}}}^{\sqrt{n-1}}\tau_n^{(1)\prime}(\lambda)d\lambda=1$$

于是

$$1-\tau_n^{(3)}(\lambda)=\frac{n\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_{\lambda}^{\sqrt{n-1}}$$

$$\left(1-\frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}dx$$

$$-\frac{n}{\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n-2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\int_{\lambda}^{\sqrt{\frac{n-2}{2}}}\left(1-\frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}dx$$

$$\int_{\delta_n(x)}^{\sqrt{n-2}}\left(1-\frac{y^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}}dy$$

$$+\frac{n}{\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{(n-1)(n-2)}{n-3}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}\int_{\lambda}^{\sqrt{\frac{n-3}{3}}}$$

$$\left(1-\frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}dx\int_{\delta_n(x)}^{\sqrt{\frac{n-3}{2}}}\left(1-\frac{y^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}}dy$$

$$\int_{\delta_{n-1}(y)}^{\sqrt{n-3}}\left(1-\frac{z^2}{n-3}\right)^{\frac{n-6}{2}}dz$$

一般

$$\tau_n^{(l)}(\lambda)=\tau_n^{(l-1)}(\lambda)-(-1)^{l-1}\frac{n}{\pi^{l/2}}$$

$$\sqrt{\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-l+1)}{n-l}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-l-1}{2}\right)}$$

$$\int_{\lambda}^{\sqrt{\frac{n-l}{l}}}\left(1-\frac{x_1^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}dx_1\int_{\delta_n(x_1)}^{\sqrt{\frac{n-l}{l-1}}}\left(1-\frac{x_2^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}}dx_2$$

$$\int_{\delta_{n-1}(x_2)}^{\sqrt{\frac{n-l}{l-2}}}\left(1-\frac{x_3^2}{n-3}\right)^{\frac{n-6}{2}}dx_3\cdots$$

$$\int_{\delta_{n-l+3}(x_{l-2})}^{\sqrt{\frac{n-l}{2}}}\left(1-\frac{x_{l-1}^2}{n-l+1}\right)^{\frac{n-l-2}{2}}dx_{l-1}\int_{\delta_{n-l+2}(x_{l-1})}^{\sqrt{n-l}}$$

$$\left(1-\frac{x_l^2}{n-l}\right)^{\frac{n-l-3}{2}}dx_l \qquad (13.6)$$

前面我们已知$\frac{\max v_i}{s_1}$的分布密度，根据它，我们可以取

定显著性水平 α，求出 $\frac{\max v_i}{s_i}$ 临界值。

实际工作中广泛采用算出

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma v_i^2}$$

用 $\frac{\max v_i}{\hat{\sigma}}$ 为剔除粗差根据，其临界值因

$$\frac{\max v_i}{\hat{\sigma}}=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{\max v_i}{s_1}$$

故将 $\frac{\max v_i}{s_1}$ 临界值乘以 $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$ 即得。

取定显著性水平 α，满足

$$P\left(\frac{\max v_i}{\hat{\sigma}}\geqslant g(n,\alpha)\right)=\alpha \tag{13.7}$$

之临界值 $g(n,\alpha)$ 如表13.1[29]。

由于 $\min v_i=\max(-v_i)$，故对 $\frac{\min v_i}{\hat{\sigma}}$，将它反号，则

其分布与 $\frac{\max v_i}{\hat{\sigma}}$ 相同。

下面利用上述分布来剔除粗差。

在测量中，超出规定条件下预期的误差即明显歪曲测量结果的误差叫粗差，包含粗差的测量值叫异常值，异常值是不可取的，必须剔除，我们可以根据 $\frac{\max v_i}{\hat{\sigma}}$ 的分布，得到剔除粗差的格拉布斯准则如下。

剔除准则：

根据以往经验，需注意测量中最大值是否为异常，若

表13.1 g(n,α)值

n \ α	0.05	0.025	0.01	0.005	n \ α	0.05	0.025	0.01	0.005
					31	2.759	2.924	3.119	3.253
					32	2.773	2.938	3.135	3.270
3	1.153	1.155	1.155	1.155	33	2.786	2.952	3.150	3.286
4	1.463	1.481	1.492	1.496	34	2.799	2.965	3.164	3.301
5	1.672	1.715	1.749	1.764	35	2.811	2.979	3.178	3.316
6	1.822	1.887	1.944	1.973	36	2.823	2.991	3.191	3.330
7	1.938	2.020	2.097	2.139	37	2.835	3.003	3.204	3.343
8	2.032	2.126	2.221	2.274	38	2.846	3.014	3.216	3.356
9	2.110	2.215	2.323	2.387	39	2.857	3.025	3.228	3.369
10	2.176	2.290	2.410	2.482	40	2.866	3.036	3.240	3.381
11	2.234	2.355	2.485	2.564	41	2.877	3.046	3.251	3.393
12	2.285	2.412	2.550	2.636	42	2.887	3.057	3.261	3.404
13	2.331	2.462	2.607	2.699	43	2.896	3.067	3.271	3.415
14	2.371	2.507	2.659	2.755	44	2.905	3.075	3.282	3.425
15	2.409	2.549	2.705	2.806	45	2.914	3.085	3.292	3.435
16	2.443	2.585	2.747	2.852	46	2.923	3.094	3.302	3.445
17	2.475	2.620	2.785	2.894	47	2.931	3.103	3.310	3.455
18	2.504	2.651	2.821	2.932	48	2.940	3.111	3.319	3.464
19	2.532	2.681	2.854	2.968	49	2.948	3.120	3.329	3.474
20	2.557	2.709	2.884	3.001	50	2.956	3.128	3.336	3.483
21	2.580	2.733	2.912	3.031	51	2.964	3.136	3.345	3.491
22	2.603	2.758	2.939	3.060	52	2.971	3.143	3.353	3.500
23	2.624	2.781	2.963	3.087	53	2.978	3.151	3.361	3.507
24	2.644	2.802	2.987	3.112	54	2.986	3.158	3.368	3.516
25	2.663	2.822	3.009	3.135	55	2.992	3.166	3.376	3.524
26	2.681	2.841	3.029	3.157	56	3.000	3.172	3.383	3.531
27	2.698	2.859	3.049	3.178	57	3.006	3.180	3.391	3.539
28	2.714	2.876	3.068	3.199	58	3.013	3.186	3.397	3.546
29	2.730	2.893	3.085	3.218	59	3.019	3.193	3.405	3.553
30	2.745	2.908	3.103	3.236	60	3.025	3.199	3.411	3.560

续表

n \ α	0.05	0.025	0.01	0.005	n \ α	0.05	0.025	0.01	0.005
65	3.055	3.230	3.442	3.592	105	3.224	3.400	3.617	3.771
70	3.082	3.257	3.471	3.622	110	3.239	3.415	3.632	3.787
75	3.107	3.282	3.496	3.648	115	3.254	3.430	3.647	3.802
80	3.130	3.305	3.521	3.673	120	3.267	3.444	3.662	3.817
85	3.151	3.327	3.543	3.695	125	3.281	3.457	3.675	3.831
90	3.171	3.347	3.563	3.716	130	3.294	3.470	3.688	3.843
95	3.189	3.365	3.582	3.736	135	3.306	3.482	3.700	3.856
100	3.207	3.383	3.600	3.754	140	3.318	3.493	3.712	3.867
					145	3.328	3.505	3.723	3.879

$$\max v_i > g(n,\alpha)\cdot\hat{\sigma}$$

则认为最大值含粗差而抛去；

根据以往经验，需注意测量中最小值是否为异常，若

$$-\min v_i > g(n,\alpha)\cdot\hat{\sigma}$$

则认为最小值含粗差而抛去。

例 对某量测量，得5个值如下：

序号	测量值x_i	第一回v_i	第二回v_i
1	443.22	−0.18	0.06
2	443.26	−0.14	0.10
3	443.13	−0.27	−0.03
4	443.03	−0.37	−0.13
5	444.35	0.95	/

第一回 $\bar{x}=443.40$

第二回 $\bar{x}=443.16$

根据以往经验，这种测量最小值无异常，问最大值有异常否？

算

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x_i}{5}=443.40,\quad \hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{5-1}}=0.54$$

$$g(5,0.05)\cdot\hat{\sigma}=1.67\times 0.54=0.90$$

对最大值x_5，$v_5=0.95>0.90$，故抛去x_5。

对余下的值，算

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x_i}{4}=443.16,\quad \hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{4-1}}=0.10$$

$$g(4,0.05)\cdot\hat{\sigma}=1.46\times 0.10=0.15$$

最大值x_2无异常，故余下值已无异常。

第四节　狄克逊（Dixon）标准

将独立同分布测量值x_i排成顺序量

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$$

狄克逊研究了$\frac{x_{(n)}-x_{(n-j)}}{x_{(n)}-x_{(i)}}$的分布[30]。

今研究统计量

$$r_{10}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(1)}}$$

由第一节，$x_{(1)}$，$x_{(n-1)}$，$x_{(n)}$之概率元为

$$\frac{n!}{(n-3)!}f(y_1)dy_1\left(\int_{y_1}^{y_{n-1}}f(t)dt\right)^{n-3}f(y_{n-1})f(y_n)dy_{n-1}dy_n$$

其中f为x_i的密度。

取

$$v=y_n-y_1,\quad r_{10}v=y_n-y_{n-1},\quad x=y_n$$

则

$$y_n=x,\quad y_1=x-v,\quad y_{n-1}=x-r_{10}v$$

而

$$\left|\frac{\partial(y_n,\ y_1,\ y_{n-1})}{\partial(x,\ v,\ r)}\right|=v$$

对x，v在全范围内积分，可得r_{10}分布密度

$$f_r(r_{10})=\frac{n!}{(n-3)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\left(\int_{x-v}^{x-r_{10}v}f(t)dt\right)^{n-3}\right.$$

$$\left.f(x-v)f(x-r_{10}v)f(x)vdv\right)dx$$

不失一般性，可设x_i期望为0，方差为1．则对正态分布

1．当n=3

$$f_r(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}$$

分布函数

$$F_r(x)=\frac{3}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

取定显著性水平α，令

$$F_r(d(3,\alpha))=1-\alpha$$

则临界值

$$d(3,\alpha)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$$

2．当n=4

$$f_r(x)=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\left\{\frac{1-2x}{\sqrt{4x^2-4x+8}}-\frac{x-2}{\sqrt{3x^2-4x+4}}\right\}$$

$$F_r(x)=5-\frac{6}{\pi}\left\{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{4x^2-4x+8}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right.$$

$$\left.\cdot\sqrt{3x^2-4x+4}\right\}$$

3． 当 n=5

$$f_r(x)=\frac{15\left(h(x)+h\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\pi^2(x^2-x+1)}$$

其中

$$h(x)=\frac{2-x}{\sqrt{3x^2-4x-4}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(1-x)\sqrt{5(8x^2-4x+4)}}{3x^2-3x+4}$$

一般，$r_{i,j-1}=\dfrac{x_{(n)}-x_{(n-i)}}{x_{(n)}-x_{(j)}}$密度为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{n!}{(i-1)!\,(n-i-j-1)!\,(j-1)!}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{x-v}f(t)dt\right)^{i-1}f(x-v)$$

$$\left(\int_{x-v}^{x-rv}f(t)dt\right)^{n-i-j-1}f(x-rv)f(x)$$

$$\left(\int_{x-rv}^{x}f(t)dt\right)^{j-1}dv\,dx$$

取定显着性水平，我们可以算出 r 临界值 $d(n,\alpha)$ 如表13.2，制表时设x_i iid $N(\mu,\sigma^2)$。

根据统计量 r，可以剔除粗差。

对剔除粗差，狄克逊认为：$n\leqslant7$时，用r_{10}效果好；$8\leqslant n\leqslant10$时，用r_{11}效果好；$11\leqslant n\leqslant13$时，用r_{21}效果好；$n\geqslant14$时，用r_{22}效果好。

粗差剔除的狄克逊标准步骤：

1．根据测量次数 n、检验目的（需注意测量中最大值是否异常还是最小值是否异常），计算统计量 r。

n	检验最大值异常	检验最小值异常
3—7	$r_{10}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(1)}}$	$r_{10}'=\frac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n)}}$
8—10	$r_{11}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}$	$r_{11}'=\frac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}$
11—13	$r_{21}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-2)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}$	$r_{21}'=\frac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}$
14—30	$r_{22}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-2)}}{x_{(n)}-x_{(3)}}$	$r_{22}'=\frac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-2)}}$

2. 确定显著性水平，查出临界值$d(n,\alpha)$。

3. 若$r>d(n,\alpha)$，则当检验最大值时，判 $x_{(n)}$ 为异常值，当检验最小值时，判 $x_{(1)}$ 为异常值。

第五节 双侧检验

上两节所述剔除粗差的标准，需根据以往经验，注意异常值出现在最大值还是在最小值，称它为单侧检验。

若需检验是否有异常值，但不知是最大值或最小值，即异常值在高端或低端都可能出现，则称为双侧检验[81]。

下面介绍上两节标准的双侧检验法。其临界值近似地可用上两节的表查出。

1. **双侧检验的格拉布斯法**

(1) 对测量值 x_i，求

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i,\quad v_i=x_i-\bar{x}$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma v_i^2}$$

并对x_i中最大值$x_{(n)}$及最小值$x_{(1)}$算统计量

表13.2 $d(n,\alpha)$值

统计量	n \ α	0.05	0.025	0.01	0.005
$r_{10}=\dfrac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(1)}}$, $r_{10}'=\dfrac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n)}}$	3	0.941	0.970	0.988	0.994
	4	0.765	0.828	0.889	0.926
	5	0.642	0.708	0.780	0.821
	6	0.560	0.623	0.698	0.740
	7	0.507	0.566	0.637	0.680
$r_{11}=\dfrac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}$, $r_{11}'=\dfrac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}$	8	0.554	0.611	0.683	0.725
	9	0.512	0.568	0.635	0.677
	10	0.477	0.533	0.597	0.639
$r_{21}=\dfrac{x_{(n)}-x_{(n-2)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}$, $r_{21}'=\dfrac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}$	11	0.576	0.622	0.679	0.718
	12	0.546	0.590	0.642	0.675
	13	0.521	0.564	0.615	0.649
$r_{22}=\dfrac{x_{(n)}-x_{(n-2)}}{x_{(n)}-x_{(3)}}$, $r_{22}'=\dfrac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-2)}}$	14	0.546	0.587	0.641	0.674
	15	0.525	0.565	0.616	0.647
	16	0.507	0.545	0.595	0.624
	17	0.490	0.529	0.577	0.605
	18	0.475	0.514	0.561	0.589
	19	0.462	0.501	0.547	0.575
	20	0.450	0.489	0.535	0.562
	21	0.440	0.478	0.524	0.551
	22	0.430	0.468	0.514	0.541
	23	0.421	0.459	0.505	0.532
	24	0.413	0.451	0.497	0.524
	25	0.406	0.444	0.489	0.516
	26	0.399	0.436	0.486	0.508
	27	0.393	0.430	0.475	0.501
	28	0.387	0.424	0.469	0.495
	29	0.381	0.418	0.463	0.489
	30	0.376	0.413	0.457	0.483

$$\frac{x_{(n)}-\bar{x}}{\hat{\sigma}}, \quad \frac{\bar{x}-x_{(1)}}{\hat{\sigma}}$$

(2) 取定显著性水平α_0，由测量次数n及$\alpha=\frac{\alpha_0}{2}$于表13.1中查出临界值$g(n,\alpha)$。

(3) 若$\frac{x_{(n)}-\bar{x}}{\hat{\sigma}}>\frac{\bar{x}-x_{(1)}}{\hat{\sigma}}$且$\frac{x_{(n)}-\bar{x}}{\hat{\sigma}}>g(n,\alpha)$，则$x_{(n)}$为异常值；

若$\frac{\bar{x}-x_{(1)}}{\hat{\sigma}}>\frac{x_{(n)}-\bar{x}}{\hat{\sigma}}$且$\frac{\bar{x}-x_{(1)}}{\hat{\sigma}}>g(n,\alpha)$，则$x_{(1)}$为异常值。

例 1　对某量测15次，将它们按大小排列，列出其尾数如下：

−1.40,	−0.44,	−0.30,	−0.24,	−0.22,
−0.13,	−0.05,	0.06,	0.10,	0.18,
0.20,	0.39,	0.48,	0.63,	1.01

异常值两端均可能出现，我们用双侧检验法。

(1) 求出

$$\bar{x}=\frac{1}{15}\Sigma x_i=0.018 \quad ,\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{15-1}\Sigma(x_i-\bar{x})^2}=0.551$$

$$\frac{x_{(15)}-\bar{x}}{\hat{\sigma}}=\frac{1.01-0.018}{0.551}=1.800$$

$$\frac{\hat{\sigma}-x_{(1)}}{\bar{x}}=\frac{0.018-(-1.40)}{0.551}=2.574$$

(2) 取$\alpha_0=0.05$，而$\alpha=0.025$，$g(15,0.025)=2.549$

(3) 因 $2.574>1.800$，且 $2.574>2.549$，故抛去异常值$x_{(1)}$。

对余下14个测量值，重新编$x_{(i)}$，再进行判断：

(1) 求出

$$\bar{x}=\frac{1}{14}\Sigma x_i=0.119,\quad \hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{14-1}\Sigma(x_i-\bar{x})^2}=0.401$$

$$\frac{x_{(14)}-\bar{x}}{\hat{\sigma}}=\frac{1.01-0.119}{0.401}=2.222$$

$$\frac{\bar{x}-x_{(1)}}{\hat{\sigma}}=\frac{0.119-(-0.44)}{0.401}=1.394$$

(2) 取$\alpha_0=0.05$，而$\alpha=0.025$，$g(14,0.025)=2.507$。

(3) 因$2.222>1.394$，但$2.222<2.507$，故余下的14个值中$x_{(14)}=1.01$不能抛去。

故余下的14个值已无异常值。

2. 双侧检验的狄克逊法

(1) 将测量值x_i排成顺序量$x_{(i)}$，而

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$$

并算统计量r，r'

n	r	r'
3—7	$r_{10}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(1)}}$	$r_{10}'=\frac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n)}}$
8—10	$r_{11}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}$	$r_{11}'=\frac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}$
11—13	$r_{21}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-2)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}$	$r_{21}'=\frac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}$
14—30	$r_{22}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-2)}}{x_{(n)}-x_{(3)}}$	$r_{22}'=\frac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-2)}}$

(2) 取定显著性水平α_0，由测量次数n及$\alpha=\frac{\alpha_0}{2}$于表13.2中查出临界值$d(n,\alpha)$；

(3) 若$r>r'$且$r>d(n,\alpha)$，则$x_{(n)}$为异常值；

若 $r'>r$，且$r'>d(n,\alpha)$，则$x_{(1)}$为异常值。

例 2 同例 1 测量数据。

今用双侧检验的狄克逊法检验异常值。

(1) 算

$$\frac{x_{(15)}-x_{(13)}}{x_{(15)}-x_{(3)}}=\frac{1.01-0.48}{1.01-(-0.30)}=0.406$$

$$\frac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(13)}}=\frac{-1.40-(-0.30)}{-1.40-0.48}=0.585$$

(2) 取$\alpha_0=0.05$，则$\alpha=\frac{\alpha_0}{2}=0.025$，$d(15,\ 0.025)=0.565$。

(3) 因$0.585>0.406$且$0.585>0.565$，故最小值$x_{(1)}=-1.40$为异常值，应抛去。

对余下14个值，重新编$x_{(i)}$，再进行判断：

(1) 算

$$\frac{x_{(14)}-x_{(12)}}{x_{(14)}-x_{(3)}}=\frac{1.01-0.48}{1.01-(-0.24)}=0.424$$

$$\frac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(12)}}=\frac{-0.44-(-0.24)}{-0.44-0.48}=0.217$$

(2) 取$\alpha_0=0.05$，$\alpha=\frac{\alpha_0}{2}=0.025$，则 $d(14,0.025)=0.587$

(3) 因0.424，0.217 均小于 0.587，故不能再剔除测量值。

故余下的14个值已无异常值。

第六节　肖维勒（Chauvenet）标准

进行 n 次测量，取不可能发生的个数为$\frac{1}{2}$，则对正态分布$N(0,1)$，误差不可能出现概率取为

$$1-\int_{-\omega_n}^{\omega_n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x=\frac{\frac{1}{2}}{n}$$

对不同n，算出ω_n值如表13.3。

表13.3　ω_n 值

n	ω_n	n	ω_n	n	ω_n
3	1.38	10	1.96	17	2.17
4	1.53	11	2.00	18	2.20
5	1.65	12	2.03	19	2.22
6	1.73	13	2.07	20	2.24
7	1.80	14	2.10	30	2.39
8	1.86	15	2.13	40	2.49
9	1.92	16	2.15	50	2.58

肖维勒准则认为，若测量一次标准差为σ，当某量独立测得x_1，x_2，…，x_n，算$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i$，$v_i=x_i-\bar{x}$，若某

$$|v_i|>\omega_n\sigma$$

则该x_i应抛去。

此准则出发点不严格，且σ实用中取估计值

$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma v_i^2}$，故此准则有一定的近似性。

第七节　其它粗差剔除标准的讨论

下面讨论一些常遇到的值得注意或不合适的粗差剔除标准。

1. $3\hat{\sigma}$ 标准

若对某量等精度独立测得 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，算

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\Sigma x_i$$

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma v_i^2}$$

若

$$|v_i| > 3\sigma$$

则 x_i 应抛去，上式 σ 为一次测量标准差，实际工作中用 $\hat{\sigma}$ 代之，即

$$|v_i| > 3\hat{\sigma}$$

则 x_i 应抛去。

由第二节性质 1，我们知道

$$|v_i| \leqslant \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma v_i^2}$$

$$\leqslant \frac{n-1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma v_i^2}$$

即

$$|v_i| \leqslant \frac{n-1}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}$$

于是，当 $n \leqslant 10$ 时

$$|v_i| < 3\hat{\sigma}$$

上面说明，当测量次数在10次以下时，用 $3\hat{\sigma}$ 准则不能剔去任何数据。从而当测量在10次以下时，用这一办法不能剔去粗差。

2．罗马诺夫斯基(Романовский)t检验标准

对多次独立同分布测量值 $x_i \sim N(\mu,\sigma^2)$，不包含可疑值(最大值或最小值)x_n在内，算出平均值$\tilde{x}$及标准差$\tilde{\sigma}$；若[32]

$$|x_n - \tilde{x}| > k(n,\alpha)\cdot\tilde{\sigma}$$

则剔除x_n，而n,α为测量次数及显著性水平。

此法中$k(n,\alpha)$等于t分布临界值$t_\alpha(n-\alpha)$（其显著性水平为α，自由度为$n-2$）乘以$\sqrt{\frac{n}{n-1}}$。

此准则出发于，对等精度独立测量的两组数

$$x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{1n_1}$$

$$x_{21},\ x_{22},\ \cdots,\ x_{2n_2}$$

当x_{1i}及x_{2i} $\underset{\sim}{\text{iid}}$ $N(\mu,\sigma^2)$，则两组平均

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\Sigma x_{1i}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\Sigma x_{2i}$$

有

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_\sigma} \sim t(n_1+n_2-2)$$

其中

$$s_\sigma = \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}\cdot\sqrt{\frac{\Sigma(x_{1i}-\bar{x}_1)^2 + \Sigma(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2-2}}$$

现在若可疑值为x_n，这算第一组，其余$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$算第二组，则

$$s_\sigma=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\tilde{\sigma}$$

$$\frac{x_n-\tilde{x}}{s_\sigma}\sim t(n-2)$$

取定显著性水平，从而$x_n-\tilde{x}$应以

$$t_\alpha(n-2)s_\sigma=t_\alpha(n-2)\sqrt{\frac{n}{n-1}}\tilde{\sigma}=k(n,\alpha)\tilde{\sigma}\text{ 为限值。}$$

这一准则是不方便的，因须排除可疑值后再算$\tilde{x}$及$\tilde{\sigma}$，若该组测量没有可以剔除的值，则还须再算平均值及标准差。

这一准则不但不方便，更为根本的在于它的根据是不妥的，因为被怀疑之值不可能是中间的值，而只能是边界上的最大值或最小值，它既不与余下来的值独立，也不会服从正态分布，从而无法得到$\frac{x_n-\tilde{x}}{s_\sigma}\sim t(n-2)$的结论。

第十四章　投影误差分布

第一节　投影误差性质

在测量工作中，常需使仪器和量具处于理想状态，如水平或垂直状态，以得出精确的测量结果，由于安装调整误差的存在，实际位置与理想位置总有一定差异，从而对测量结果带来误差，这种误差称为投影误差，其分布称为投影误差分布。

此种误差如：

1. 长度测量中，常须使基准尺与被检尺处于同一方向，以进行比较，实际长度l'用偏离α角的基准尺长l去测量，造成误差（图14.1）

$$\delta = l - l'$$
$$= l(1-\cos\alpha)$$

2. 测量圆盘直径，由于安放的测量仪器总使测量线与圆心有偏离，带来误差（图14.2）

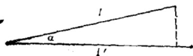


图14.1　长度测量偏离

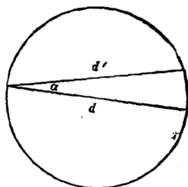


图14.2　圆盘测量偏心

$$\delta = d' - d$$
$$= -d(1-\cos\alpha)$$

3. 研究测力机时，测力机上下拉头中心连线不垂直，测力机应受力P，实际受力

$$F=P\cos\alpha$$

造成误差（图14.3）

$$\delta=\frac{F-P}{P}=-(1-\cos\alpha)$$



图14.3 测力机受力误差

4. 重力加速度测量中，测量须使光线垂直，若反射镜安装有误差，则光线不垂直，当光线与垂线偏α角，则对重力加速度带来误差

$$\frac{dg}{g}=1-\cos\alpha\approx\frac{\alpha^2}{2}$$

投影误差亦可在其它工作中找到很多例子。

以上情况可归纳为：由于实际状态偏离理想状态夹角α（α限制在范围A内），对测量结果带来误差

$$\delta=1-\cos\alpha$$

由于偏角α一般认为在0到A内取任一值机会相等，即α为服从$[0,A]$内均匀分布的随机变量，要问δ性质如何？

注意到：

1. α可以是带正负号的（即垂直状态时可左偏或右偏，水平状态时可上偏或下偏），也可以是仅带一个符号的，因$\cos\alpha=\cos(-\alpha)$，故α带正负号与α仅取正号情况相同。

2. 有的投影误差$\delta'=\cos\alpha-1$，因它与$\delta=1-\cos\alpha$仅差一符号，故对问题研究实质无关。

3. 若实际投影误差为$l(1-\cos\alpha)$，此时其相对误差$\delta=1-\cos\alpha$，故原误差的相对误差即与$1-\cos\alpha$一样。

下面讨论投影误差基本性质。

设投影误差

$$\delta=1-\cos\alpha \tag{14.1}$$

其中α服从$[0,A]$内均匀分布，即其密度（图14.4）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & 当\ x\in[0,A]\\ 0, & 其它\end{cases}$$

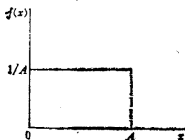


图14.4 均匀分布

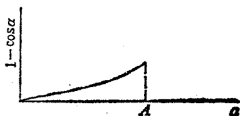


图14.5 投影误差取值

我们有

性质 1 δ的最大误差为 $1-\cos A\approx\dfrac{A^2}{2}$

证 因α最大值为A，由$1-\cos\alpha$的单调增性质，知δ的最大值（图14.5）

$$1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}\approx\frac{A^2}{2}$$

性质 2 δ的分布函数$F(y)$及分布密度$f(y)$（图14.6）为

$$F(y)=\begin{cases}0, & 当\ y<0\\ \dfrac{1}{A}\arccos(1-y), & 当 y\in[0,1-\cos A]\\ 1, & 当 y>1-\cos A\end{cases}$$

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-y)^2}}, & 当 y\in[0,1-\cos A]\\ 0, & 其它\end{cases}$$

证　因δ恒正且小于$1-\cos A$，故

$$F(y)=P(\delta<y)=\begin{cases}0, & 当y<0\\ 1, & 当y>1-\cos A\end{cases}$$

当$y\in[0,1-\cos A]$时有

$$F(y)=P(1-\cos\alpha<y)$$
$$=P(\alpha<\arccos(1-y))$$

因 $\alpha\sim U[0,A]$，故

$$F(y)=\frac{\arccos(1-y)}{A}$$

而在此区间上

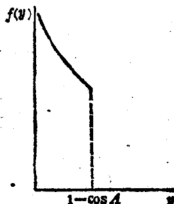


图14.6　投影误差分布密度

$$f(y)=\frac{d}{dy}F(y)=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(1-y)^2}}$$

在此区间外，由$F(y)$为常数知$f(y)=0$。

性质 3　δ的期望可取为最大误差的$\frac{1}{3}$

证　δ的期望

$$E=\int_0^{1-\cos A}y\frac{1}{A\sqrt{1-(1-y)^2}}dy$$

令$1-y=x$，得

$$E=\frac{1}{A}\int_{\cos A}^{1}\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=1-\frac{\sin A}{A}$$

于是期望与最大误差之比

$$\frac{E}{1-\cos A}=\frac{1-\dfrac{\sin A}{A}}{1-\cos A}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{30}A^2+O(A^4)\right)\approx\frac{1}{3}$$

性质 4　δ的标准差可取为最大误差的$\frac{3}{10}$

证　δ的二阶原点矩

$$\alpha_2=\int_0^{1-\cos A} y^2\frac{1}{A\sqrt{1-(1-y)^2}}dy$$

作代换$1-y=x$,则

$$\alpha_2=\frac{1}{A}\int_{\cos A}^{1}\frac{1-2x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{A}\left\{\frac{3}{2}A-\sin A\left(2-\frac{\cos A}{2}\right)\right\}$$

而方差

$$\sigma^2=\alpha_2-E^2\doteq\frac{1}{2}+\frac{\sin A\cos A}{2A}-\frac{\sin^2 A}{A^2}$$

于是

$$\frac{\sigma}{1-\cos A}=\frac{2}{3\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{84}A^2+O(A^4)\right)\approx\frac{3}{10}$$

性质 5　δ小于其均值E的概率可取为0.57

证　由性质 2 性质 3 知

$$P(\delta<E)=\frac{1}{A}\arccos\frac{\sin A}{A}$$

由$\cos x$级数展开式可得

$$\arccos x=\sqrt{2(1-x)+\frac{1}{3}(1-x)^2+O((1-x)^4)}$$

于是

$$\arccos\frac{\sin A}{A}=\frac{A}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{90}A^2+O(A^4)\right)$$

$$P(\delta<E)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{90}A^2+O(A^4)\right)\approx 0.57$$

性质 6　δ在$E\pm\delta$范围内概率可取为0.61

证　因

$$\sigma^2=a_2-E^2=\frac{1}{45}A^4-\frac{1}{315}A^6+O(A^8)$$

$$\sigma=\frac{A^2}{\sqrt{45}}\left(1-\frac{1}{14}A^2+O(A^4)\right)$$

对$y=E+c\sigma$(c为任一常数)，因

$$y=A^2\left(\frac{1}{6}+\frac{c}{\sqrt{45}}\right)-A^4\left(\frac{1}{51}+\frac{c}{14\sqrt{45}}\right)+O(A^6)$$

故

$$P(\delta<y)=\frac{1}{A}\text{arc}\cos(1-y)$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{2c}{\sqrt{45}}\right)^{\frac{1}{2}}(1+O(A^2))$$

当$c=1$时

$$P(\delta<E+\sigma)=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{\sqrt{45}}\right)^{\frac{1}{2}}=0.80$$

当$c=-1$时

$$P(\delta<E-\sigma)=\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{\sqrt{45}}\right)^{\frac{1}{2}}=0.19$$

故

$$P(E-\sigma<\delta<E+\sigma)=0.80-0.19=0.61$$

第二节　任意分布分位数的正态表示

我们经常要知道任意分布与正态分布的关系。

由第六章第三节埃奇沃思级数，我们可以将任意分布的密度与正态分布的密度联系起来。

本节将建立任意分布的分位数与正态分布的联系，以供下节应用。

我们经常用到爱尔米特多项式

$$H_m(x)=(-1)^m e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}e^{-x^2/2} \tag{14.2}$$

而

$$\begin{aligned}
&H_0=1\\
&H_1=x\\
&H_2=x^2-1\\
&H_3=x^3-3x\\
&H_4=x^4-6x^2+3\\
&H_5=x^5-10x^3+15x\\
&H_6=x^6-15x^4+45x^2-15\\
&H_7=x^7-21x^5+105x^3-105x\\
&H_8=x^8-28x^6+210x^4-420x^2+105\\
&H_9=x^9-36x^7+378x^5-1260x^3+945x\\
&H_{10}=x^{10}-45x^8+630x^6-3150x^4+4725x^2-945
\end{aligned} \tag{14.3}$$

一般

$$H_m(x)=m!\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{2^k k!(m-2k)!}x^{m-2k} \tag{14.4}$$

现考虑 $H_m(x)$ 与标准正态分布 $N(0,\ 1)$ 的密度 $\varphi(x)$ 乘积的傅里叶变换，而

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

因

$$\sqrt{2\pi}\,\varphi(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$\sqrt{2\pi}\frac{d^r}{dt^r}\varphi(t)=(-1)^r\sqrt{2\pi}H_r(t)\varphi(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} i^r x^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{itx}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

故 $x^r\varphi(x)$ 变为 $i^r\sqrt{2\pi}H_r(t)\varphi(t)$。由逆变换知

$$x^r\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}i^r\sqrt{2\pi}H_r(t)\varphi(t)dt$$

交换 x 与 t，得

$$\sqrt{2\pi}(-i)^r t^r\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}H_r(x)\varphi(x)dx$$

改变 t 的符号，知 $H_r(x)\varphi(x)$ 变为 $\sqrt{2\pi}i^r t^r\varphi(t)$。

现考虑表达式

$$\{\exp(\kappa_r D^r)\}\varphi(x)$$

的特征函数，其中 D 为微分算子，而 $\exp(\kappa_r D^r)$ 为作用于 $\varphi(x)$ 的算子。

我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\exp(\kappa_r D^r)\varphi(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\sum\left(\frac{\kappa_r^j D^{rj}}{j!}\right)\varphi(x)dx$$

$$=\sum\frac{\kappa_r^j}{j!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}D^{rj}\varphi(x)dx$$

$$=\sum\frac{\kappa_r^j}{j!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}(-1)^{rj}H_{rj}(x)\varphi(x)dx$$

$$=\sum\frac{\kappa_r^j}{j!}\sqrt{2\pi}(-i)^{rj}t^{rj}\varphi(t)$$

$$=\sqrt{2\pi}\varphi(t)\exp\{\kappa_r(-it)^r\}$$

类似，知

$$\exp\left\{-\frac{\kappa_1-a}{1!}D+\frac{\kappa_2-b}{2!}D^2-\frac{\kappa_3}{3!}D^3+\frac{\kappa_4}{4!}D^4-\cdots\right\}\varphi(x)$$

的特征函数为

$$\sqrt{2\pi}\,\varphi(t)\exp\left\{\frac{\kappa_1-a}{1!}it+\frac{\kappa_2-b}{2!}(it)^2+\frac{\kappa_3}{3!}(it)^3+\frac{\kappa_4}{4!}(it)^4+\cdots\right\}$$

若将 $\varphi(x)$ 代以

$$\beta(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

则知

$$\exp\left\{-\frac{\kappa_1-a}{1!}D+\frac{\kappa_2-b}{2!}D^2-\frac{\kappa_3}{3!}D^3+\frac{\kappa_4}{4!}D^4\cdots\right\}\beta(x)$$

的特征函数为

$$\sqrt{2\pi}\,\varphi(t\sigma)e^{it\mu}\exp\left\{\frac{\kappa_1-a}{1!}it+\frac{\kappa_2-b}{2!}(it)^2+\frac{\kappa_3}{3!}(it)^3+\frac{\kappa_4}{4!}(it)^4\cdots\right\}$$

取 $a=\mu$，$b=\sigma^2$，则知

$$\exp\left\{-\frac{\kappa_1-\mu}{1!}D+\frac{\kappa_2-\sigma^2}{2!}D^2-\frac{\kappa_3}{3!}D^3+\frac{\kappa_4}{4!}D^4\cdots\right\}\beta(x) \tag{14.5}$$

的特征函数为

$$\frac{\kappa_1}{1!}it+\frac{\kappa_2}{2!}(it)^2+\frac{\kappa_3}{3!}(it)^3+\frac{\kappa_4}{4!}(it)^4+\cdots \tag{14.6}$$

故(14.5)为半不变量是(κ_1, κ_2, κ_3, κ_4, …)的随机变量η的分布密度按$N(\mu, \sigma^2)$的密度$\beta(x)$的展开（此时设(14.5)收敛到一分布密度且该分布由矩唯一决定）。

一般，我们可假定半不变量κ_r为n^{1-r}阶，而η的分布取决于n，当n趋于无穷时，分布趋于正态（如η为m个独立同分布变量之和，则$n=m$）。

选取μ，σ^2使

$$\kappa_1-\mu=l_1\sigma, \qquad l_1=O(n^{-\frac{1}{2}})$$

$$\kappa_2-\sigma^2=l_2\sigma^2, \qquad l_2=O(n^{-1})$$

且当$i\geqslant 3$时，记

$$l_i=\kappa_i/\sigma^i$$

则σ^2与κ_2同阶，即为n^{-1}阶，因此

$$\frac{\kappa_r}{\sigma^r}=O(n^{1-\frac{1}{2}r})$$

于是(14.5)可写为

$$\exp\left\{-l_1\sigma D+\frac{l_2\sigma^2D^2}{2}-\frac{l_3\sigma^3D^3}{6}+\frac{l_4\sigma^4D^4}{24}\right.$$

$$\left.-\frac{l_5\sigma^5D_5}{120}+\frac{l^6\sigma^6D^6}{720}-\cdots\right\}\beta(x)$$

其中

l_1与l_3为$O(n^{-\frac{1}{2}})$

l_2与l_4为$O(n^{-1})$

l_5为$O(n^{-\frac{3}{2}})$

l_6为$O(n^{-2})$

将上式中 $\exp\{\cdots\}$ 展至 $O(n^{-2})$，得

$$
\begin{aligned}
&1-l_1\sigma D+\frac{1}{2}l_2\sigma^2D^2-\frac{1}{6}l_3\sigma^3D^3+\frac{1}{24}l_4\sigma^4D^4\\
&-\frac{1}{120}l_5\sigma^5D^5+\frac{1}{720}l_6\sigma^6D^6+\frac{1}{2}\Big(l_1^2\sigma^2D^2\\
&+\frac{1}{4}l_2^2\sigma^4D^4+\frac{1}{36}l_3^2\sigma^6D^6+\frac{1}{576}l_4^2\sigma^8D^8\\
&-l_1l_2\sigma^3D^3+\frac{1}{3}l_1l_3\sigma^4D^4-\frac{1}{12}l_1l_4\sigma^5D^5\\
&+\frac{1}{60}l_1l_5\sigma^6D^6-\frac{1}{6}l_2l_3\sigma^5D^5+\frac{1}{24}l_2l_4\sigma^6D^6\\
&-\frac{1}{72}l_3l_4\sigma^7D^7+\frac{1}{360}l_3l_5\sigma^8D^8\Big)\\
&+\frac{1}{6}\Big(-l_1^3\sigma^3D^3-\frac{1}{216}l_3^3\sigma^9D^9+\frac{3}{2}l_1^2l_2\sigma^4D^4\\
&-\frac{1}{2}l_1^2l_3\sigma^5D^5-\frac{1}{8}l_1^2l_4\sigma^6D^6+\frac{1}{288}l_3^2l_4\sigma^{10}D^{10}\\
&-\frac{1}{12}l_1l_3^2\sigma^7D^7+\frac{1}{24}l_2l_3^2\sigma^8D^8+\frac{1}{2}l_1l_2l_3\sigma^6D^6\\
&+\frac{1}{24}l_1l_3l_4\sigma^8D^8\Big)+\frac{1}{24}\Big(l_1^4\sigma^4D^4+\frac{1}{1296}l_3^4\sigma^{12}D^{12}\\
&+\frac{2}{3}l_1^3l_3\sigma^6D^6+\frac{1}{6}l_1^2l_3^2\sigma^8D^8+\frac{1}{54}l_1l_3^3\sigma^{10}D^{10}\Big)
\end{aligned}
$$

将算子 σ^rD^r 代以 $(-1)^rH_r\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$，并乘以 $\beta(x)$，再积分，则得 η 小于 $\mu+\sigma x$ 的概率

$$F(x)=F_\eta(\mu+\sigma x)$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)dx+\varphi(x)\left[-\left(l_1+\frac{1}{6}l_3H_2\right)-\cdots\right]$$

现设ξ为正态变量，且

$$G(\xi)=\int_{-\infty}^{\xi}\varphi(y)dy=F(x)$$

因

$$G(\xi)=G\{x+(\xi-x)\}$$

$$=G(x)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\xi-x)^r}{r!}\frac{d^r}{dx^r}G(x)$$

$$=G(x)-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(x-\xi)^r}{r!}H_{r-1}(x)\varphi(x)$$

取

$$x-\xi=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

求得a_i后，按n降阶排列，知

$$x-\xi=l_1+\frac{1}{6}l_3(x^2-1)+\frac{1}{2}l_2x-\frac{1}{3}l_1l_3x+\frac{1}{24}l_4(x^3-3x)$$

$$-\frac{1}{36}l_3^2(4x^3-7x)-\frac{1}{2}l_1l_2+\frac{1}{6}l_1^2l_3-\frac{1}{12}l_2l_3(5x^2-3)$$

$$-\frac{1}{8}l_1l_4(x^2-1)+\frac{1}{120}l_5(x^4-6x^2+3)$$

$$+\frac{1}{36}l_1l_3^2(12x^2-7)-\frac{1}{144}l_3l_4(11x^4-42x^2+15)$$

$$+\frac{1}{648}l_3^3(69x^4-187x^2+52)-\frac{3}{8}l_2^2x+\frac{5}{6}l_1l_2l_3x$$

$$+\frac{1}{8}l_1^2l_4x-\frac{1}{48}l_2l_4(7x^3-15x)-\frac{1}{30}l_1l_5(x^3-x)$$

$$+\frac{1}{720}l_6(x^5-10x^3+15x)-\frac{1}{3}l_1^2l_3^2x$$

$$+\frac{1}{72}l_2l_3^2(36x^3-49x)-\frac{1}{384}l_4^2(5x^5-32x^3+35x)$$

$$+\frac{1}{36}l_1l_3l_4(11x^3-21x)-\frac{1}{360}l_3l_5(7x^5-48x^3+51x)$$

$$-\frac{1}{324}l_1l_3^3(138x^3-187x)+\frac{1}{864}l_3^2l_4(111x^5-547x^3$$

$$+456x)-\frac{1}{7776}l_3^4(948x^5-3628x^3+2473x) \qquad (14.7)$$

因

$$x-\xi=g(x)=g(\xi+x-\xi)=g(\xi)+(x-\xi)g'(\xi)$$
$$=g(\xi)+g'(\xi)\{g(\xi)+(x-\xi)g'(\xi)\}+\cdots$$

继续此过程，得

$$x-\xi=g(\xi)+g(\xi)g'(\xi)+g(\xi)g'^2(\xi)+\frac{1}{2}g^2(\xi)g''(\xi)$$

$$+g(\xi)g'^3(\xi)+\frac{3}{2}g^2(\xi)g'(\xi)g''(\xi)$$

$$+\frac{1}{6}g^3(\xi)g'''(\xi)+\cdots$$

将 $g(\xi)$ 用(14.7)右端代入，得

$$x-\xi=l_1+\frac{1}{6}l_3(\xi^2-1)+\frac{1}{2}l_2\xi+\frac{1}{24}l_4(\xi^3-3\xi)$$

$$-\frac{1}{36}l_3^2(2\xi^3-5\xi)-\frac{1}{6}l_2l_3(\xi^2-1)$$

$$+\frac{1}{120}l_5(\xi^4-6\xi^2+3)-\frac{1}{24}l_3l_4(\xi^4-5\xi^2+2)$$

$$+\frac{1}{324}l_3^3(12\xi^4-53\xi^2+17)-\frac{1}{8}l_2^2\xi$$

$$-\frac{1}{16}l_2l_4(\xi^3-3\xi)+\frac{1}{720}l_6(\xi^5-10\xi^3+15\xi)$$

$$+\frac{1}{72}l_2l_3^2(10\xi^3-25\xi)-\frac{1}{384}l_4^2(3\xi^5-24\xi^3+29\xi)$$

$$-\frac{1}{180}l_3l_5(2\xi^5-17\xi^3+21\xi)+\frac{1}{288}l_3^2l_4(14\xi^5$$

$$-103\xi^3+107\xi)-\frac{1}{7776}l_3^4(252\xi^5-1688\xi^3$$

$$+1511\xi) \tag{14.8}$$

以上(14.7)(14.8)称柯尼西-费希尔(Cornish-Fisher)公式。

当选 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 时，若取 μ 为 η 之一阶半不变量 κ_1，取 σ^2 为 η 之二阶半不变量 κ_2，则 $l_1=0$，$l_2=0$，于是可有

$$x-\xi=\frac{1}{6}l_3(x^2-1)+\frac{1}{24}l_4(x^3-3x)-\frac{1}{36}l_3^2(4x^3-7x)$$

$$x-\xi=\frac{1}{6}l_3(\xi^2-1)+\frac{1}{24}l_4(\xi^3-2\xi)-\frac{1}{36}l_3^2(2\xi^3-5\xi)$$

因 η 之偏倚系数 γ_1 与超越系数 γ_2 为

$$\gamma_1=\frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}}=\frac{\kappa_3}{\sigma^3}=l_3$$

$$\gamma_2=\frac{\kappa_4}{\kappa_2^2}=\frac{\kappa_4}{\sigma^4}=l_4$$

于是

$$x-\xi=\frac{1}{6}\gamma_1(x^2-1)+\frac{1}{24}\gamma_2(x^3-3x)-\frac{1}{36}\gamma_1^2(4x^3-7x) \tag{14.9}$$

$$x-\xi=\frac{1}{6}\gamma_1(\xi^2-1)+\frac{1}{24}\gamma_2(\xi^3-2\xi)-\frac{1}{36}\gamma_1^2(2\xi^3-5\xi)$$

(14.10)

一般，若

$$\eta=\sum_{i=1}^{n}\eta_i$$

且 η_i 独立，则 η 之半不变量 κ_r 与 η_i 之半不变量 $\kappa_{r,i}$ 间有关系

$$\kappa_r=\sum\kappa_{r,i}$$

设 η 之分位数 $y_p=\mu+\sigma x$ 满足 $F_\eta(\mu+\sigma x)=p$，且正态分布 $N(0,1)$之分位数 ξ 满足 $\phi(\xi)=p$，则

$$\begin{aligned}x=\xi&+\{\gamma_1h_1(\xi)\}\\&+\{\gamma_2h_2(\xi)+\gamma_1^2h_{11}(\xi)\}\\&+\{\gamma_3h_3(\xi)+\gamma_1\gamma_2h_{12}(\xi)+\gamma_1^3h_{111}(\xi)\}\\&+\{\gamma_4h_4(\xi)+\gamma_2^2h_{22}(\xi)+\gamma_1\gamma_3h_{13}(\xi)\\&+\gamma_1^2\gamma_2h_{112}(\xi)+\gamma_1^4h_{1111}(\xi)\}\end{aligned}\qquad(14.11)$$

其中

$$\gamma_{r-2}=\frac{\kappa_r}{\kappa_2^{r/2}},\qquad r=3,\ 4,\ \cdots$$

且{…}为对 n 同阶项。

又

$$h_1(\xi)=\frac{1}{6}H_2(\xi)$$

$$h_2(\xi)=\frac{1}{24}H_3(\xi)$$

$$h_{11}(\xi)=-\frac{1}{36}\{2H_3(\xi)+H_1(\xi)\}$$

$$h_3(\xi)=\frac{1}{120}H_4(\xi)$$

$$h_{12}(\xi)=-\frac{1}{24}\{H_4(\xi)+H_2(\xi)\}$$

$$h_{111}(\xi)=\frac{1}{324}\{12H_4(\xi)+19H_2(\xi)\}$$

$$h_4(\xi)=\frac{1}{720}H_5(\xi)$$

$$h_{22}(\xi)=-\frac{1}{384}\{3H_5(\xi)+6H_3(\xi)+2H_1(\xi)\}$$

$$h_{13}(\xi)=-\frac{1}{180}\{2H_5(\xi)+3H_3(\xi)\}$$

$$h_{112}(\xi)=\frac{1}{288}\{14H_5(\xi)+37H_3(\xi)+8H_1(\xi)\}$$

$$h_{1111}(\xi)=-\frac{1}{7776}\{252H_5(\xi)+832H_3(\xi)+227H_1(\xi)\}$$

$h(\xi)$之值如表14.1[9]。

第三节　投影误差分布的合成

若有几个独立投影误差，其合成分布误差如何求？

我们知道，独立随机变量η_i之和$\eta=\sum\eta_i$的特征函数$\theta(t)$等于η_i的特征函数$\theta_i(t)$之积，即

$$\theta(t)=\prod\theta_i(t)$$

且η的各阶半不变量κ_r为η_i对应半不变量$\kappa_{r,i}$之和，即

表14.1 分位数正态系数值

$G(\xi)$	0.25	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001
ξ	0.67449	1.64485	1.95996	2.32635	2.57583	2.80703	3.09022
$h_1(\xi)$	−0.09084	0.28426	0.47358	0.73532	0.93915	1.14657	1.42491
$h_2(\xi)$	−0.07153	−0.02018	0.06872	0.23379	0.39012	0.57070	0.84331
$h_{11}(\xi)$	0.07663	−0.01878	−0.14607	−0.37634	−0.59171	−0.83890	−1.21025
$h_3(\xi)$	0.00398	−0.04928	−0.04410	−0.00152	0.06010	0.14841	0.30746
$h_{12}(\xi)$	0.00282	0.17532	0.10210	−0.17621	−0.53531	−1.02868	−1.89355
$h_{111}(\xi)$	−0.01428	−0.11900	−0.02937	0.25195	0.59757	1.06301	1.86787
$h_4(\xi)$	0.00998	−0.01082	−0.02357	−0.03176	−0.02621	−0.00666	0.04591
$h_{22}(\xi)$	−0.03285	0.05985	0.09059	0.07888	−0.01226	−0.19116	−0.59060
$h_{13}(\xi)$	−0.05126	0.09462	0.16106	0.16058	0.05366	−0.17498	−0.70464
$h_{112}(\xi)$	0.14764	−0.39517	−0.55858	−0.32621	0.35696	1.60445	4.29304
$h_{1111}(\xi)$	−0.06898	0.25623	0.31624	0.07286	−0.46534	−1.39199	−3.32708

$$\kappa_r=\sum\kappa_{r,i}$$

当 η 的分布函数 F 在 $E+\sigma x$ 处之值与标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数 Φ 在 x_0 之值若相同，即

$$F(E+\sigma x)=\Phi(\xi)$$

其中 E、σ 为 η 的期望与标准差，则由式(14.9)可知

$$\xi=x-\frac{1}{6}\gamma_1(x^2-1)-\frac{1}{24}\gamma_2(x^3-3x)+\frac{1}{36}\gamma_1^2(4x^3-7x)$$

其中 η 的偏倚系数

$$\gamma_1=\frac{\kappa_3}{\sigma^3}=\frac{\sum\kappa_{3,i}}{(\sum\sigma_i^2)^{3/2}}$$

η 的超越系数

$$\gamma_2=\frac{\kappa_4}{\sigma^4}=\frac{\sum\kappa_{4,i}}{(\sum\sigma_i^2)^2}$$

例如，现在我们要计算三个独立相同的投影误差合成之误差 δ_Σ 小于其期望 E_{δ_Σ} 及在 $E_{\delta_\Sigma}\pm\sigma$ 内概率(σ 为 δ_Σ 标准差)。

对于任何投影误差 δ_i，我们可导出其偏倚系数与超越系数

$$\gamma_{1,i}=0.64$$

$$\gamma_{2,i}=-0.86$$

故对 n 个独立相同投影误差之合成误差，其

$$\gamma_1=\frac{n\kappa_{3,i}}{n^{3/2}\sigma_i^3}=\gamma_{1,i}n^{-\frac{1}{2}}$$

$$\gamma_2=\frac{n\kappa_{4,i}}{n^2\sigma_i^4}=\gamma_{2,i}n^{-1}$$

当 $n=3$ 时

$$\gamma_1=\gamma_{1,t}3^{-\frac{1}{2}}=0.370$$
$$\gamma_2=\gamma_{2,t}3^{-1}=-0.287$$

由

$$\xi=x-\frac{1}{6}\gamma_1(x^2-1)-\frac{1}{24}\gamma_2(x^3-3x)+\frac{1}{36}\gamma_1^2(4x^3-7x)$$

知当 $x=0$ 时，$\xi=0.064$，由

$$\int_{-\infty}^{0.064}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=0.526$$

知 δ_Σ 小于期望概率为 0.526。

又当 $x=-1$ 时，$\xi=-0.965$，且

$$\int_{-\infty}^{-0.965}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=0.167$$

当 $x=1$ 时，$\xi=0.965$，且

$$\int_{-\infty}^{0.965}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=0.833$$

故 δ_Σ 在 $E_{\delta_\Sigma}\pm\sigma$ 内概率为 $0.833-0.167=0.666$。

第四节　投影误差分布的应用

例 1　某投影误差

$$\delta=l(1-\cos\alpha),\quad \alpha\leqslant 1'$$

则它的相对最大误差

$$\Delta_p=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3438}\right)^2=4.2\times10^{-8}$$

相对误差的期望

$$E=\frac{1}{3}\Delta_p=1.4\times10^{-8}$$

相对标准差为

$$\sigma=\frac{3}{10}\Delta_{p}=1.3\times10^{-8}$$

例 2 有独立投影误差两个

$$\delta_1=1-\cos\alpha_1,\quad \alpha_1\leqslant 1'$$

$$\delta_2=1-\cos\alpha_2,\quad \alpha_2\leqslant 2'$$

求合成误差。

因这是两个单向误差，分出它们的常差即期望部分

$$E_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3438}\right)^2=1.4\times10^{-8}$$

$$E_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3438}\right)^2=5.6\times10^{-8}$$

其余部分具偶然误差特点，标准差为

$$\sigma_1=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3438}\right)^2=1.3\times10^{-8}$$

$$\sigma_2=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3438}\right)^2=5.1\times10^{-8}$$

常差按代数和法合成，偶然误差按和方根法合成，于是合成误差的

$$E=E_1+E_2=7.0\times10^{-8}$$

$$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}=5.3\times10^{-8}$$

例 3 分三段测某长度（图 14.7），每段误差 $\delta_i=1-\cos\alpha_i$，$\alpha_i\leqslant 1'$，$(i=1,2,3)$，求全长误差 δ_Σ 的期望 E_{δ_Σ} 与标准差 σ，并求 δ_Σ 在 $E_{\delta_\Sigma}\pm\sigma$ 内概率。

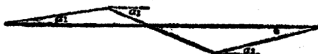


图14.7 分段测长

由例1，知

$$E_i = 1.4 \times 10^{-8}$$

$$\sigma_i = 1.3 \times 10^{-8}$$

故

$$E_{\delta_\Sigma} = 3E_i = 4.2 \times 10^{-8}$$

$$\sigma = \sqrt{3}\,\sigma_i = 2.2 \times 10^{-8}$$

由上节知，δ_Σ 在 $E_{\delta_\Sigma} \pm \sigma$ 内概率为 0.668。

第十五章　产品寿命与威布尔分布

第一节　引　言

各部门生产的各种产品，必须充分地知道它们的性能。每种产品的寿命是该产品的极其重要的性能，因为它决定了产品的使用期限，从而与产品的使用价值有直接的关系。

由于制造材料的不可能完全一样，热处理和机械处理的微小差异，几何尺寸加工上的误差等等，使得同种产品的寿命是一个随机变量，即其使用寿命有的长，有的短，于是研究产品寿命就要用概率统计的方法研究它的分布。

在寿命研究中，使用的分布有威布尔分布、负指数分布和对数正态分布。由于负指数分布是威布尔分布的特殊情况，而且威布尔分布可以由极小值理论导出，所以在寿命研究中，以威布尔分布使用得广泛而且效果显著，它在轴承、机器寿命等的研究中早有应用。

本章从威布尔分布的基本性质出发，研究了它的应用方法。

第二节　威布尔分布基本性质

产品寿命终止时间ξ（注意ξ有时也指次数等），服从威布尔分布，指ξ的分布密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{m}{a}x^{m-1}e^{-x^{m/a}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{15.1}$$

上式包含m和a两个参数，而$0<a<\infty$，$0<m<\infty$。当$a=1$时，分布密度的图形如图15.1.

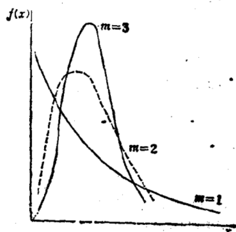


图 15.1 威布尔分布密度

对(15.1)积分，可得ξ的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x^{m/a}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{15.2}$$

对某一产品，若知其寿命分布(15.1)(15.2)，则显然，该产品使用至时间t而损坏的概率为$F(t)$[33]。

为使用威布尔分布，我们求ξ的k阶原点矩$E\xi^k$，有

$$\left.\begin{aligned}E\xi&=a^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)\\ E\xi^2&=a^{\frac{2}{m}}\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)\\ E\xi^3&=a^{\frac{3}{m}}\Gamma\left(\frac{3}{m}+1\right)\end{aligned}\right\} \tag{15.3}$$

等，一般

$$E\xi^k = a^{\frac{k}{m}}\Gamma\left(\frac{k}{m}+1\right) \tag{15.4}$$

其中$\Gamma(x)$为x的Γ函数

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{15.5}$$

而ξ的期望E与标准差σ为

$$E=a^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right) \tag{15.6}$$

$$\sigma=\sqrt{E\xi^2-(E\xi)^2}=a^{\frac{1}{m}}\left\{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{15.7}$$

在实际工作中，还经常把ξ的分布函数写为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{x}{V}\right)^m}\\0\end{cases} \tag{15.8}$$

显然，式(15.2)与式(15.8)实质一样，只须将式(15.2)中a代以V^m即得式(15.8)。

第三节 参数估计

为对产品寿命进行计算，必须对其所服从的分布式(15.1)中的参数m与a进行估计。

由式(15.6)及(15.7)可得

$$a=\left\{\frac{E}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}\right\}^m \tag{15.9}$$

表15.1　威布尔分布用值

σ/E	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	127.5391	63.3789	42.0410	31.3599	24.9512	20.6787	17.6331	15.3473	13.5742
0.1	12.1536	10.9924	10.0281	9.2110	8.5114	7.9071	7.3784	6.9122	6.4987	6.1295
0.2	5.7976	5.4977	5.2254	4.9774	4.7504	4.5422	4.3503	4 1729	4.0085	3.8559
0.3	3.7138	3.5810	3.4569	3.3407	3.2314	3.1288	3.0321	2 9408	2.8545	2.7729
0.4	2.6957	2.6222	2.5526	2.4864	2.4234	2.3633	2.3061	2.2513	2.1992	2.1492
0.5	2.1013	2.0555	2.0117	1.9696	1.9291	1.8903	1.8529	1.8170	1.7824	1.7491
0.6	1.7171	1.6861	1.6563	1.6275	1.5997	1.5729	1.5469	1.5218	1.4976	1.4740
0.7	1.4513	1.4292	1.4079	1.3871	1.3670	1.3475	1.3286	1.3103	1.2924	1.2751
0.8	1.2583	1.2419	1.2259	1.2105	1.1954	1.1807	1.1664	1.1525	1.1389	1.1257
0.9	1.1128	1.1003	1.0880	1.0761	1.0644	1.0530	1.0419	1.0311	1.0205	1.0101

$\frac{\sigma}{E}$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	1.0000	0.9103	0.8376	0.7776	0.7274	0.6848	0.6482	0.6165	0.5888	0.5644
2	0.5427	0.5233	0.5059	0.4901	0.4758	0.4627	0.4507	0.4397	0.4295	0.4201
3	0.4113	0.4032	0.3956	0.3884	0.3817	0.3754	0.3694	0.3638	0.3585	0.3535
4	0.3487	0.3441	0.3398	0.3357	0.3317	0.3280	0.3244	0.3209	0.3176	0.3144
5	0.3113	0.3084	0.3056	0.3028	0.3002	0.2977	0.2952	0.2928	0.2905	0.2883
6	0.2862	0.2841	0.2820	0.2801	0.2782	0.2763	0.2745	0.2728	0.2711	0.2694
7	0.2678	0.2662	0.2647	0.2632	0.2618	0.2603	0.2589	0.2576	0.2563	0.2550
8	0.2537	0.2525	0.2513	0.2501	0.2489	0.2478	0.2467	0.2456	0.2445	0.2435
9	0.2425	0.2414	0.2405	0.2395	0.2385	0.2376	0.2367	0.2358	0.2349	0.2341
10	0.2332	0.2324	0.2315	0.2307	0.2299	0.2292	0.2284	0.2276	0.2269	0.2262

$\frac{\sigma}{E}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m	0.2254	0.2188	0.2130	0.2079	0.2034	0.1994	0.1957	0.1924	0.1894	0.1866

$$\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}=\frac{\sigma}{E} \tag{15.10}$$

由式(15.10)知m仅与$\frac{\sigma}{E}$有关，故由$\frac{\sigma}{E}$可查出对应的m值，其值见表15.1[8]。

这样，若我们对某种产品的部分产品使用终止时间测得为

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

则E与σ的无偏估计为

$$\hat{E}=\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i \tag{15.11}$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma(x_i-\bar{x})^2} \tag{15.12}$$

于是由表15.1，按$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{E}}$可查出$m$，再按

$$a=\left\{\frac{\hat{E}}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}\right\}^m \tag{15.13}$$

可算出a，Γ函数的数值列于附表8，查表时注意Γ函数性质

$$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)=(x-1)(x-2)\Gamma(x-2) \tag{15.14}$$

等，从而对任何x值均可将其代在[1, 2]内查表，再按式(15.14)求得$\Gamma(x)$值。

当寿命分布函数为式(15.8)时，代替a算V更为便利，而

$$V=\frac{\hat{E}}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)} \tag{15.15}$$

例 某滚动轴承的接触疲劳寿命须进行实验，随机抽样后测得该类轴承的寿命以循环周次（以 10^7 为单位）表示的 x_i 为

0.4，　3.7，　3.8，　3.8，
7.6，　8.4，　9.0，　9.1，
17.9，20.0，28.3，30.4

按式(15.11)及式(15.12)算得

$$\hat{E}=\bar{x}=11.9$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma(x_i-\bar{x})^2}=9.96$$

故

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{E}}=0.837$$

由表15.1可得

$$m=1.20$$

由附表 8 查得

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)=\Gamma(1.83)=0.93969$$

故

$$a=\left\{\frac{\hat{E}}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}\right\}^m=\left(\frac{119}{0.93969}\right)^{1.20}=12.7^{1.20}=21.1$$

当轴承寿命以式(15.8)表示，则

$$V=\frac{\hat{E}}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}=12.7$$

第四节　寿命计算

求得产品所服从的威布尔分布的参数后，可对产品的寿命进行计算。

由式(15.2)我们知道，产品以可靠性 p(90%，50%等)使用期限至x_p时，则x_p应满足

$$1-e^{-x_p^m/a}=1-p \tag{15.16}$$

注意式(15.8)或令

$$a^{1/m}=V$$

可得

$$\frac{x_p}{V}=(-\ln p)^{\frac{1}{m}} \tag{15.17}$$

这样，已知分布参数m及V(或a)，当欲产品寿命的可靠性为p时，就可由式(15.17)求出产品寿命x_p。

为使用方便，可将$(-\ln p)^{\frac{1}{m}}$作图。为此，研究p固定时m的函数

$$f(m)=(-\ln p)^{\frac{1}{m}}$$

由

$$\frac{d}{dm}f(m)=(\ln(-\ln p))(-\ln p)^{\frac{1}{m}}(-m^{-2})$$

$$\frac{d^2}{dm^2}f(m)=(\ln(-\ln p))\frac{(-\ln p)^{\frac{1}{m}}}{m^3}\left\{\frac{\ln(-\ln p)}{m}+2\right\}$$

我们知道

1．当$p>e^{-1}=0.3679$时，$f(m)$曲线单调增，且在$-\frac{1}{2}\ln(-\ln p)$处有拐点，拐点左面曲线为凹，拐点右面曲线

为凸. 渐近线为 $f(m)=1$.

2. 当 $p=e^{-1}$ 时, $f(m)$ 恒等于 1.

3. 当$p<e^{-1}$时, $f(m)$对应曲线单调降且恒凸, 渐近线为$f(m)=1$.

常用的$p=0.9$及0.5的$(-\ln p)^{\frac{1}{m}}$曲线如图15.2.

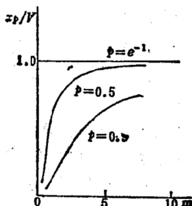


图 15.2 威布尔分布寿命计算

例 同第三节例数据

因该轴承寿命服从威布尔分布之

$$m=1.20$$

$$V=a^{\frac{1}{m}}=12.7$$

故对可靠性为90%的寿命$x_{0.9}$, 由图15.2查$p=0.9$曲线, 当$m=1.20$时

$$(-\ln p)^{\frac{1}{m}}=0.153$$

而

$$\frac{x_{0.9}}{V}=0.153$$

$$x_{0.9}=0.153\times 12.7=1.94$$

第十六章　测量结果的不确定度

第一节　引　　言

测量对人们的研究和生产极为重要。测量结果的使用与其不确定度有密切关系，不确定度大，则使用价值低，不确定度小，则使用价值高。测量不确定度是测量质量的一个极其重要的指标。

按国际定义：测量不确定度是表征量值范围的一个评定，而被测量真值位于该范围中[34][35][36][37][38]。

评定测量不确定度前，应先将测量中所有应修正之值予以修正。然后寻找不确定度来源，测量不确定度一般来源于测量装置、测量环境、测量人员、测量方法和测量对象。

测量结果不确定度一般包含几个分量，按其评定方法，这些分量可分成两类：

A类：用统计方法计算的分量；

B类：用其它方法计算的分量。

各分量不确定度在高精度测量工作中应详细列出，说明其数值获得方法，以便以后应用和分析。

按国际计量局建议，不确定度用标准差σ表征（或方差σ^2表征）。

在研究测量不确定度时，要考虑测量值分布，这时，测量值的基本分布取作正态分布。

正态分布应用得广泛，是由于按中心极限定理，大量、独立、均匀小的误差之和趋于正态分布。正态分布应用的广

泛性，也由实践所证实。

第二节 统计不确定度

A类不确定度即统计不确定度，它由统计法计算。

由统计法可以算出A类不确定度的表征值 s_i（标准差）。

1. **等精度直接测量**

仅某个不确定度来源变化，对某量a等精度独立测得

$$x_{i1},\ x_{i2},\ \cdots,\ x_{in_i}$$

则由第九章第二节，知计算一次测量标准差的方法有

（1） 贝塞尔法

$$s_i=\sqrt{\frac{1}{n_i-1}\ \Sigma v_{ik}^2}$$

其中 $v_{ik}=x_{ik}-\frac{1}{n_i}\Sigma x_{ik}$

（2） 彼得法

$$s_i=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}\cdot\Sigma|v_{ik}|$$

其中 $v_{ik}=x_{ik}-\frac{1}{n_i}\Sigma x_{ik}$

（3） 最大残差法

$$s_i=\frac{1}{k'_{n_i}}\max|v_{ik}|$$

其中 $v_{ik}=x_{ik}-\frac{1}{n_i}\Sigma x_{ik}$

（4） 极差法

$$s_i=\frac{1}{d_{n_i}}(\max x_i-\min x_i)$$

(5) 最大误差法

$$s_i=\frac{1}{k''_{n_i}}\max|x_{ik}-a|$$

系数 $1/k'_{n_i}$，$1/d_{n_i}$，$1/k''_{n_i}$ 见表9.3，表9.4，表9.5，查表时取 $n=n_i$。

此时，对平均值 $\bar{x}_i=\frac{1}{n_i}\Sigma x_{ik}$，其 $s_{\bar{x}_i}$ 为 $s_i/\sqrt{n_i}$。

2. 最小二乘法

某些统计不确定度可由最小二乘法算出。

由第十章第四节知，对向量 X 测其线性函数

$$\underset{nt}{A}\,\underset{tl}{X}=\underset{nl}{L}$$

而 L 权

$$P=\begin{pmatrix}p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n\end{pmatrix}$$

当 $R(A)=t\leqslant n$，则最佳值的求解方程为

$$A'PAX=A'PL$$

而

$$X=(A'PA)^{-1}A'PL$$
$$=QA'PL$$

由 X 可求出 $V=L-AX$，而算得的单位权标准差

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-t}\Sigma p_i v_i^2}$$

而 $f=F'x$ 的标准差

$$s_f=s\sqrt{F'QF}$$

当 $F'=(0,\cdot,0,1,0,\cdot,0)$，则由上式可得 X 某分量的标准差。

统计不确定度还可由别的方法算。如可由第九章第五节算出多组测量中标准差，此时可由(9.15)算出组内标准差平方，由(9.16)算出组间标准差平方，

第三节　非统计不确定度

B类不确定度即非统计不确定度，它由非统计法计算。

由非统计法可以算出 B 类不确定度的表征值 u_j(标准差的近似)。实际工作中常用估计的方法。

1. 估计来源的不确定度

若来源不确定度为u_{0j}，它对测量结果f的不确定度传播系数为$\frac{\partial f}{\partial x_j}$，则该来源对 f 带来的不确定度表征值

$$u_j=\frac{\partial f}{\partial x_j}u_{0j}$$

如尺子长度受到温度不确定度 u_{0j} 的影响，将其乘以长度的温度膨胀系数，即不确定度传播系数$\frac{\partial f}{\partial x_j}$，即得温度对长度造成的不确定度$\frac{\partial f}{\partial x_j}u_{0j}$。

2. 直接估计来源对测量结果造成的不确定度u_j

根据正态分布特点，先估计一个 b 值：

(1) 若估计真值可以概率 68% 落入测量结果$\pm b$ 内，则 $u_j=b$；

(2) 若估计真值可以概率 50% 落入测量结果$\pm b$ 内，则 $u_j=1.5b$；

(3) 若估计真值可以概率 95% 落入测量结果$\pm b$ 内，

则 $u_j=b/2$;

（4） 若估计真值可以概率99%落入测量结果±b内，则 $u_j=b/2.6$;

（5） 若估计真值可以概率99.7%落入测量结果±b内，则 $u_j=b/3$。

第四节　合成不确定度

若测量结果含有不确定度分量

A类：s_1，s_2，…，s_i，…

B类：u_1，u_2，…，u_j，…

则合成不确定度

$$\sigma=\sqrt{\sum s_i^2+\sum u_j^2+2\sum_{i<j}\sigma_{ij}}$$

其中σ_{ij}是任意两不确定度分量间协方差。

以两不确定度σ_1,σ_2为例，合成为

$$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$$

其中 $\rho\in[-1,1]$为相关系数，其求法见文献[1]。

当上述两不确定度完全正相关，$\rho=1$，而

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2$$

当上述两不确定度无关，$\rho=0$，而

$$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

此结论可推至多个。

对于通常无关情况

$$\sigma=\sqrt{\sum\sigma_i^2}$$

第五节　总不确定度和国际上关于不确定度的建议

对于正态分布，合成不确定度σ的置信概率只有68%，在一些具体工作中，此概率常感不足，须要加大（如加大为95%，99.7%等）。为此，须将合成不确定度乘以一个因子，以求得总不确定度[39][40][19]。

1．**样本分布**

若我们对某量等精度独立测得

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

而$x_i \sim N(\mu,\sigma^2)$，则由第八章第五节，知

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\Sigma(x_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\Sigma(x_i-\bar{x})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\Sigma(x_i-\bar{x})^2}} \sim t(n-1)$$

置

$$P\left(\frac{|\bar{x}-\mu|}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\Sigma(x_i-\bar{x})^2}} \leqslant t_p(n-1)\right)=p$$

而以置信概率p，平均值的总不确定度

$$U=t_p(n-1)\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$$

2. 若测量结果f与独立量$x_1,x_2,\cdots,x_m$有关系

$$f=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$$

当 x_i 方差为σ_i^2，则f的方差

$$\sigma^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2\sigma_m^2$$

$$=\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\sigma_i^2\triangleq\Sigma a_i^2\sigma_i^2$$

若由以前测得$x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in_i}$，算

$$s_i=\sqrt{\frac{1}{n_i-1}\ \Sigma(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\nu_i}\ \Sigma(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}$$

其中$\bar{x}_i=\frac{1}{n_i}\Sigma x_{ik}$，　$\nu_i=n_i-1$

设 $x_{ij}\ \underset{\sim}{iid}\ N(\mu_i,\sigma_i^2)$，显然

$$\frac{\nu_i s_i^2}{\sigma_i^2}\sim\chi^2(\nu_i)$$

从而s_i^2是σ_i^2无偏估计。

此时称 s_i^2 自由度为 ν_i，亦称 s_i 或对应不确定度自由度为 ν_i。

在上述假定下，我们有

性质 1　$s^2=\Sigma a_i^2 s_i^2$ 是 σ^2 的无偏估计，且有[10]

$$\frac{\nu s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(\nu)$$

而

$$\nu=\frac{\sigma^4}{\sum\frac{a_i^4\sigma_i^4}{\nu_i}}=\frac{s^4}{\sum\frac{a_i^4 s_i^4}{\nu_i}}$$

证

（1） 因

$$Es_i^2=\sigma_i^2$$

$$Es^2=\Sigma a_i^2 Es_i^2=\Sigma a_i^2\sigma_i^2=\sigma^2$$

故s^2是σ^2的无偏估计。

（2） 因 $\chi^2(\nu)$ 的特征函数为

$$\theta(t)=(1-2\sqrt{-1}\,t)^{-\nu/2}$$

故 $a_i^2 s_i^2=a_i^2\frac{\sigma^2}{\nu_i}\chi^2(\nu)$的特征函数为

$$\left(1-2\sqrt{-1}\ \frac{a_i^2\sigma_i^2}{\nu_i}t\right)^{-\nu_i/2}\triangleq(1-2\sqrt{-1}\,K_i t)^{-\nu_i/2}$$

而 $s^2=\Sigma a_i^2 s_i^2$特征函数

$$\begin{aligned}\theta_{s^2}(t)&=\Pi\,(1-2\sqrt{-1}\,K_i t)^{-\nu_i/2}\\&=\Pi\exp\left(-\frac{\nu_i}{2}\ln(1-2\sqrt{-1}\,K_i t)\right)\\&=\Pi\exp\Big(\sqrt{-1}\,\nu_i K_i t-\nu_i K_i^2 t^2\\&\quad-\frac{4}{3}\sqrt{-1}\,\nu_i K_j^3 t^3+\cdots\Big)\\&=\exp\Big(\sqrt{-1}\,\Sigma a_i^2\sigma_i^2 t-\Sigma\frac{a_i^4\sigma_i^4}{\nu_i}t^2\\&\quad-\frac{4}{3}\sqrt{-1}\,\Sigma\frac{a_i^6\sigma_i^6}{\nu_i^2}t^3+\cdots\Big)\end{aligned}$$

又$\frac{s^2}{\sigma^2}$特征函数

$$\theta_{\frac{s^2}{\sigma^2}}(t)=\exp\left\{\sqrt{-1}\,t-\left(\Sigma\frac{a_i^2\sigma_i^4}{\nu_i}\Big/\sigma^4\right)t^2\right.$$

$$\left.-\frac{4}{3}\sqrt{-1}\left(\Sigma\frac{a_i^3\sigma_i^6}{\nu_i^2}\Big/\sigma^6\right)t^3+\cdots\right\}$$

因$\chi^2(\nu)/\nu$特征函数为

$$\left(1-2\sqrt{-1}\,\frac{1}{\nu}t\right)^{-\nu/2}=\exp\left(-\frac{\nu}{2}\ln\left(1-2\sqrt{-1}\,\frac{1}{\nu}t\right)\right)$$

$$=\exp\left(\sqrt{-1}\,t-\frac{t^2}{\nu}\right.$$

$$\left.-\frac{4}{3}\sqrt{-1}\,\frac{t^3}{\nu^2}+\cdots\right)$$

故$\frac{s^2}{\sigma^2}$近似于自由度为ν的χ^2分布与ν之比，而

$$\nu=\frac{\sigma^4}{\Sigma\frac{a_i^2\sigma_i^4}{\nu_i}}$$

即

$$\frac{\nu s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(\nu)$$

系　若 $a_i\sigma_i=a_1\sigma_1,\nu_i=\nu_1$，则

$$\nu=m\nu_1$$

证　因

$$\nu=\sigma^4/\Sigma\frac{a_1^4\sigma_1^4}{\nu_1}=\frac{m^2a_1^4\sigma_1^4}{m\dfrac{a_1^4\sigma_1^4}{\nu_1}}=m\nu_1$$

性质 2

$$\frac{f-Ef}{s}\sim t(\nu)$$

证 因

$$\frac{\nu s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(\nu)$$

与本次测得 f 独立，故

$$\frac{f-Ef}{s}=\frac{(f-Ef)/\sigma}{\sqrt{\dfrac{\nu s^2}{\sigma^2}\cdot\dfrac{1}{\nu}}}\left(=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(\nu)/\nu}}\right)$$

$$\sim t(\nu)$$

性质 3 若 $y_i=a_ix_i$，则 $s_{y_i}^2=(a_is_i)^2$ 是 $\sigma_{y_i}^2$ 的无偏估计，自由度亦为 ν_i，且

$$\frac{\nu s_{y_i}^2}{\sigma_{y_i}^2}\sim\chi^2(\nu_i)$$

证 此因

$$\nu_is_{y_i}^2/\sigma_{y_i}^2=\nu_is_i^2/\sigma_i^2$$

此性质使不确定度传播时，乘系数的考虑与否与自由度无关。

性质 4 对

$$\bar{x}_i\sim N\left(\mu,\ \sigma_{\bar{x}_i}^2=\frac{\sigma_i^2}{n_i}\right)$$

算 $s_{\bar{x}_i}=s_i/\sqrt{n_i}$，则 $s_{\bar{x}_i}^2$ 是 $\sigma_{\bar{x}_i}^2$ 的无偏估计，自由度 $\nu=\nu_i$。

证 此因

$$\frac{\nu_i s_{\bar{x}_i}^2}{\sigma_{\bar{x}_i}^2}=\frac{\nu_i s_i^2}{\sigma_i^2}$$

此性质说明，对单次测量与其平均值的不确定度，它们自由度一样。

例 某测量结果有无关A类及B类不确定度如下表

序号	不确定度			自由度	
	来　源	符　号	数　值	符　号	数　值
1	基准尺	s_1	1.0	ν_1	5
2	读　数	s_2	1.0	ν_2	10
3	电压表	s_3	1.4	ν_3	4
4	电阻表	s_4	2.0	ν_4	16
5	温　度	u_1	2.0	ν_5	1

得合成不确定度

$$\sigma=\sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2+s_4^2+u_1^2}=3.5$$

对应自由度

$$\nu=\frac{\sigma^4}{\sum\frac{a_i^4\sigma_i^4}{\nu_i}}=\frac{\sigma^4}{\frac{s_1^4}{\nu_1}+\frac{s_2^4}{\nu_2}+\frac{s_3^4}{\nu_3}+\frac{s_4^4}{\nu_4}+\frac{u_1^4}{\nu_5}}$$

$$=\frac{3.5^4}{\frac{1.0^4}{5}+\frac{1.0^4}{10}+\frac{1.4^4}{4}+\frac{2.0^4}{16}+\frac{2.0^4}{1}}=8$$

由t分布取置信概率$p=0.95$得总不确定度

$$v=t_p(\nu)\cdot\sigma=t_{0.95}(8)\cdot\sigma=2.31\times3.5$$
$$=8.1$$

经过有关国际会议讨论，1980年国际计量局表示不确定度工作组提出了关于实验不确定度的建议，其内容为：

实验不确定度的说明

建议书 INC-1(1980)

1. 测量结果的不确定度一般包含几个分量，按其数值评定的方法，这些分量可归入两类：

A类：用统计方法计算的那些分量；

B类：用其它方法计算的那些分量。

A类和B类和以前的“偶然”和“系统”不确定度不一定有一个简单的对应关系，“系统不确定度”这个术语会引起误解，应避免使用。

任何详细的不确定度报告应该有各分量的完整表格单，各个分量应详细说明其数值获得的方法。

2. A类分量用估计方差s_i^2（或估计标准差s_i）、自由度ν_i表征。必要时，应给出估计协方差。

3. B类分量用量u_j^2表征，它考虑作为假设存在的相应方差的近似，象方差那样去处理u_j^2，象标准差那样去处理量u_j。必要时，应该用相似方法处理协方差。

4. 用对方差合成的通常方法，可以得到合成不确定度的表征值。合成不确定度及其分量应用“标准差”形式去表达。

5. 对特殊用途，若须对合成不确定度乘以一个因子以获得总不确定度时，所乘的因子通常必须说明。

附表 1　正态分布函数表

$$\Phi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\ dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	0.7	0.8	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79398	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84850	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147

1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92786	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94265	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99081	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861

续表

x	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
3	.99865	$.9^{3}032$	$.9^{3}313$	$.9^{3}517$	$.9^{3}663$	$.9^{3}767$	$.9^{3}841$	$.9^{3}892$	$.9^{4}277$	$.9^{4}519$
4	$.9^{4}683$	$.9^{4}793$	$.9^{4}867$	$.9^{5}146$	$.9^{5}459$	$.9^{5}660$	$.9^{5}789$	$.9^{5}870$	$.9^{6}207$	$.9^{6}521$
5	$.9^{6}713$	$.9^{6}830$	$.9^{7}004$	$.9^{7}421$	$.9^{7}667$	$.9^{7}810$	$.9^{7}893$	$.9^{8}401$	$.9^{8}668$	$.9^{8}818$
6	$.9^{9}013$	$.9^{9}470$	$.9^{9}718$	$.9^{9}851$	$.9^{10}223$	$.9^{10}598$	$.9^{10}794$	$.9^{10}896$	$.9^{11}477$	$.9^{11}740$
7	$.9^{11}872$	$.9^{12}376$	$.9^{12}699$	$.9^{12}856$	$.9^{13}319$	$.9^{13}681$	$.9^{13}852$	$.9^{14}320$	$.9^{14}690$	$.9^{14}861$
8	$.9^{15}378$	$.9^{15}725$	$.9^{15}880$	$.9^{16}479$	$.9^{16}777$	$.9^{17}052$	$.9^{17}601$	$.9^{17}834$	$.9^{18}316$	$.9^{18}721$
9	$.9^{18}887$	$.9^{19}548$	$.9^{19}821$	$.9^{20}298$	$.9^{20}727$	$.9^{20}895$	$.9^{21}600$	$.9^{21}849$	$.9^{22}437$	$.9^{22}792$

注 1. $.9^{3}032$即.999032（小数点后有3个9），

2. 当 x 为负时 $\Phi(x)=1-\Phi(|x|)$。

例 $\Phi(1.01)=.84375$

$\Phi(4.9)=.999999521$

附表 2　χ^2 分布表

$P(\chi^2 \geqslant \chi_\alpha^2) = \alpha$ 中 χ_α^2 值

ν \ α	0.10	0.05	0.01	ν \ α	0.10	0.05	0.01
1	2.7	3.8	6.6	16	23.5	26.3	32.0
2	4.6	6.0	9.2	17	24.8	27.6	33.4
3	6.3	7.8	11.3	18	26.0	28.9	34.8
4	7.8	9.5	13.3	19	27.2	30.1	36.2
5	9.2	11.1	15.1	20	28.4	31.4	37.6
6	10.6	12.6	16.8	21	29.6	32.7	38.9
7	12.0	14.1	18.5	22	30.8	33.9	40.3
8	13.4	15.5	20.1	23	32.0	35.2	41.6
9	14.7	16.9	21.7	24	33.2	36.4	43.0
10	16.0	18.3	23.2	25	34.4	37.7	44.3
11	17.3	19.7	24.7	26	35.6	38.9	45.6
12	18.5	21.0	26.2	27	36.7	40.1	47.0
13	19.8	22.4	27.7	28	37.9	41.3	48.3
14	21.1	23.7	29.1	29	39.1	42.6	49.6
15	22.3	25.0	30.6	30	40.3	43.8	50.9

附表3　t

$P(|t| \leqslant t_p) = p$ 中 t_p 值　或

ν \ p	0.9973	0.99	0.9545	0.95	0.6827
1	235.80	63.66	13.97	12.71	1.84
2	19.21	9.92	4.53	4.30	1.32
3	9.21	5.84	3.31	3.18	1.20
4	6.62	4.60	2.87	2.78	1.14
5	5.51	4.03	2.65	2.57	1.11
6	4.90	3.71	2.52	2.45	1.09
7	4.53	3.50	2.43	2.36	1.08
8	4.28	3.36	2.37	2.31	1.07
9	4.09	3.25	2.32	2.26	1.06
10	3.96	3.17	2.28	2.23	1.05
11	3.85	3.11	2.25	2.20	1.05
12	3.76	3.05	2.23	2.18	1.04
13	3.69	3.01	2.21	2.16	1.04
14	3.64	2.98	2.20	2.14	1.04
15	3.59	2.95	2.18	2.13	1.03
16	3.54	2.92	2.17	2.12	1.03
17	3.51	2.90	2.16	2.11	1.03
18	3.48	2.88	2.15	2.10	1.03
19	3.45	2.86	2.14	2.09	1.03

分　布　表

$P(|t|)>t_{\alpha})=\alpha=1-p$ 中 t_{α} 值

ν \ p	0.9973	0.99	0.9545	0.95	0.6827
20	3.42	2.85	2.13	2.09	1.03
21	3.40	2.83	2.13	2.08	1.02
22	3.38	2.82	2.12	2.07	1.02
23	3.36	2.81	2.11	2.07	1.02
24	3.34	2.80	2.11	2.06	1.02
25	3.33	2.79	2.11	2.06	1.02
26	3.32	2.78	2.10	2.06	1.02
27	3.30	2.77	2.10	2.05	1.02
28	3.29	2.76	2.09	2.05	1.02
29	3.28	2.76	2.09	2.05	1.02
30	3.27	2.75	2.09	2.04	1.02
40	3.20	2.70	2.06	2.02	1.01
50	3.16	2.68	2.05	2.01	1.01
60	3.13	2.66	2.04	2.00	1.01
70	3.11	2.65	2.04	1.99	1.01
80	3.10	2.64	2.03	1.99	1.01
90	3.09	2.63	2.03	1.99	1.01
100	3.08	2.63	2.03	1.98	1.01
∞	3	2.58	2	1.96	1

附表 4 F

$P(F \geq F_{0.05})=$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01

分　布　表

0.05中 $F_{0.05}$ 值

8	9	10	12	15	20	60	∞
238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	248.01	252.20	254.31
19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.48	19.50
8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.57	8.53
6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.69	5.63
4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.43	4.36
4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.74	3.67
3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.30	3.23
3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.01	2.93
3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.79	2.71
3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.62	2.54
2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.49	2.40
2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.38	2.30
2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.30	2.21
2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.22	2.13
2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.16	2.07
2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.11	2.01
2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.06	1.96
2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.02	1.92
2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	1.98	1.88
2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	1.95	1.84
2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	1.92	1.81
2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	1.89	1.78
2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	1.86	1.76
2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.84	1.73
2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.82	1.71
2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.74	1.62
2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.64	1.51
2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.53	1.39
2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.43	1.25
1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.32	1.00

附表5 标准化

当n个独立同均匀分布之和为y_n时

x \ n	2	3	4	5	6
0	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000
.1	.46001	.46254	.46157	.46139	.46117
.2	.42168	.42533	.42351	.42312	.42269
.3	.38503	.38862	.38615	.38551	.38490
.4	.35003	.35267	.34979	.34888	.34812
.5	.31671	.31771	.31470	.31352	.31266
.6	.28505	.28400	.28112	.27969	.27878
.7	.25506	.25179	.24924	.24764	.24669
.8	.22673	.22133	.21924	.21755	.21660
.9	.20008	.19287	.19124	.18958	.18864
1.0	.17509	.16667	.16536	.16381	.16291
1.1	.15176	.14290	.14166	.14030	.13947
1.2	.13010	.12150	.12017	.11906	.11832
1.3	.11011	.10235	.10090	.10006	.099440
1.4	.091786	.085333	.083812	.083235	.082754
1.5	.075128	.070313	.068844	.068498	.068166
1.6	.060136	.057167	.055896	.055732	.055550
1.7	.046811	.045771	.044837	.044804	.044762
1.8	.035153	.036000	.035503	.035565	.035643
1.9	.025162	.027729	.027708	.027856	.028028
2.0	.016837	.020833	.021273	.021509	.021760
2.1	.010179	.015187	.016030	.016359	.016643
2.2	$.0^{2}51871$	.010667	.011823	.012239	.012546
2.3	$.0^{2}18323$	$.0^{2}71458$	$.0^{2}85018$	$.0^{2}89931$	$.0^{2}93084$
2.4	$.0^{3}20410$	$.0^{2}45000$	$.0^{2}59358$	$.0^{2}64756$	$.0^{2}67891$

同均匀分布和表

$1-F_n(y_n/\sigma_n)=1-F_n(x)=Q_n(x)$之值

7	8	9	10	12	∞ (正态)
.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000
.46103	.46092	.46084	.46077	.40667	.46017
.42241	.42220	.42204	.42191	.42171	.42074
.38450	.38419	.38396	.38377	.38349	.38209
.34761	.34723	.34693	.34668	.34634	.34458
.31206	.31161	.31127	.31099	.31058	.30854
.27811	.27762	.27724	.27694	.27648	.27425
.24599	.24548	.24508	.24476	.24429	.24196
.21590	.21538	.21497	.21466	.21418	.21136
.18796	.18745	.18707	.18676	.18630	.18406
.16228	.16181	.16144	.16116	.16073	.15866
.13890	.13848	.13815	.13789	.13751	.13567
.11783	.11747	.11719	.11697	.11664	.11507
.099089	.098741	.098513	.098333	.098067	.096800
.082448	.082219	.082045	.081909	.081708	.080757
.067950	.067755	.067677	.067584	.067447	.066807
.055424	.055338	.055272	.055221	.055146	.054799
.044721	.044698	.044689	.044667	.044647	.044565
.035679	.035711	.035735	.035755	.035785	.035930
.028131	.028208	.028268	.028315	.028385	.028717
.021906	.022019	.022106	.022175	.022276	.022750
.016838	.016977	.017083	.017167	.017290	.017864
.012765	.012920	.013039	.013132	.013268	.013903
$.0^{2}95366$	$.0^{2}97000$	$.0^{2}98236$	$.0^{2}99207$	.010863	.010724
$.0^{2}70153$	$.0^{2}71786$	$.0^{2}73018$	$.0^{2}73985$	$.0^{2}75403$	$.0^{2}81976$

当 n 个独立同均匀分布之和为 y_n 时

x \ n	2	3	4	5	6
2.5		$.0^{2}26042$	$.0^{2}39998$	$.0^{2}45563$	$.0^{2}48608$
2.6		$.0^{2}13333$	$.0^{2}25811$	$.0^{2}31218$	$.0^{2}34105$
2.7		$.0^{3}56250$	$.0^{2}15782$	$.0^{2}20737$	$.0^{2}23397$
2.8		$.0^{3}16667$	$.0^{3}90059$	$.0^{2}13282$	$.0^{2}15650$
2.9		$.0^{4}20833$	$.0^{3}46879$	$.0^{3}81436$	$.0^{2}10170$
3.0			$.0^{3}21478$	$.0^{3}47350$	$.0^{3}63922$
3.1			$.0^{4}81365$	$.0^{3}25772$	$.0^{3}38640$
3.2			$.0^{4}22523$	$.0^{3}12892$	$.0^{3}22304$
3.3			$.0^{5}33574$	$.0^{4}57677$	$.0^{3}12180$
3.4			$.0^{7}78167$	$.0^{4}22106$	$.0^{4}62149$
3.5				$.0^{5}67442$	$.0^{4}29124$
3.6				$.0^{5}14157$	$.0^{4}12229$
3.7				$.0^{6}14486$	$.0^{5}44325$
3.8				$.0^{8}19383$	$.0^{5}13058$
3.9					$.0^{6}28094$
4.0					$.0^{7}35429$
4.1					$.0^{8}14623$
4.2					$.0^{11}10436$
4.3					
4.4					
4.5					
4.6					
4.7					
4.8					
4.9					

$1-F_n(y_n/\sigma_n)=1-F_n(x)=Q_n(x)$ 之值

7	8	9	10	12	∞ (正态)
$.0^{2}50759$	$.0^{2}52327$	$.0^{2}53509$	$.0^{2}54435$	$.0^{2}55794$	$.0^{2}62097$
$.0^{2}36083$	$.0^{2}37534$	$.0^{2}38630$	$.0^{2}39489$	$.0^{2}40750$	$.0^{2}46612$
$.0^{2}25166$	$.0^{2}26466$	$.0^{2}27453$	$.0^{2}28226$	$.0^{2}29362$	$.0^{2}34670$
$.0^{2}17192$	$.0^{2}18324$	$.0^{2}19187$	$.0^{2}19864$	$.0^{2}20861$	$.0^{2}25551$
$.0^{2}11482$	$.0^{2}12440$	$.0^{2}13174$	$.0^{2}13752$	$.0^{2}14605$	$.0^{2}18658$
$.0^{3}74785$	$.0^{3}82680$	$.0^{3}88758$	$.0^{3}93570$	$.0^{2}10070$	$.0^{2}13499$
$.0^{3}47358$	$.0^{3}53697$	$.0^{3}58601$	$.0^{3}62506$	$.0^{3}63824$	$.0^{3}96760$
$.0^{3}29047$	$.0^{3}34001$	$.0^{3}37854$	$.0^{3}40944$	$.0^{3}45582$	$.0^{3}68714$
$.0^{3}17174$	$.0^{3}20933$	$.0^{3}23880$	$.0^{3}26264$	$.0^{3}29875$	$.0^{3}48342$
$.0^{4}97293$	$.0^{3}12488$	$.0^{3}14680$	$.0^{3}16472$	$.0^{3}19217$	$.0^{3}33693$
$.0^{4}52419$	$.0^{4}71879$	$.0^{4}87713$	$.0^{3}10082$	$.0^{3}12118$	$.0^{3}23263$
$.0^{4}26597$	$.0^{4}39713$	$.0^{4}50774$	$.0^{4}60092$	$.0^{4}74822$	$.0^{3}15911$
$.0^{4}12547$	$.0^{4}20922$	$.0^{4}28365$	$.0^{4}34790$	$.0^{4}45167$	$.0^{3}10780$
$.0^{5}54071$	$.0^{4}10424$	$.0^{4}15220$	$.0^{4}19505$	$.0^{4}26614$	$.0^{4}72348$
$.0^{5}20765$	$.0^{5}48592$	$.0^{5}77968$	$.0^{4}10550$	$.0^{4}15278$	$.0^{4}48096$
$.0^{6}68509$	$.0^{5}20898$	$.0^{5}37852$	$.0^{5}54802$	$.0^{5}85261$	$.0^{4}31671$
$.0^{6}18333$	$.0^{6}81358$	$.0^{5}17252$	$.0^{5}27188$	$.0^{5}46136$	$.0^{4}20658$
$.0^{7}36083$	$.0^{6}27915$	$.0^{6}72936$	$.0^{5}12794$	$.0^{5}24134$	$.0^{4}13346$
$.0^{8}43273$	$.0^{7}81173$	$.0^{6}28148$	$.0^{6}56614$	$.0^{5}12160$	$.0^{5}85399$
$.0^{9}20341$	$.0^{7}18827$	$.0^{7}97046$	$.0^{6}23302$	$.0^{6}58757$	$.0^{5}54125$
$.0^{12}78749$	$.0^{8}31457$	$.0^{7}28907$	$.0^{7}87959$	$.0^{6}27086$	$.0^{5}33977$
	$.0^{9}31278$	$.0^{8}71817$	$.0^{7}29884$	$.0^{6}11836$	$.0^{5}21125$
	$.0^{10}12039$	$.0^{8}13758$	$.0^{8}89084$	$.0^{7}48639$	$.0^{5}13008$
	$.0^{12}45131$	$.0^{9}18146$	$.0^{8}22473$	$.0^{7}18614$	$.0^{6}79333$
		$.0^{10}13233$	$.0^{9}45476$	$.0^{8}65520$	$.0^{6}47918$

附表6 独立同均匀分布和之置信因子表

当 $\delta_i \underset{\sim}{iid} U[-a,a]$时，$\sum_{i=1}^{n}\delta_i$的置信因子

$$k(p)=\frac{\Delta(p)}{\sigma}$$

n \ p	0.6827	0.95	0.9545	0.99	0.9973
1	1.18	1.65	1.65	1.71	1.73
2	1.07	1.90	1.93	2.20	2.32
3	1.03	1.94	1.97	2.38	2.60
4	1.03	1.94	1.98	2.44	2.78
5	1.02	1.94	1.98	2.48	2.80
6	1.02	1.95	1.98	2.49	2.84
7	1.02	1.95	1.99	2.50	2.86
8	1.01	1.95	1.99	2.51	2.88
9	1.01	1.95	1.99	2.52	2.90
10	1.01	1.95	1.99	2.53	2.91
12	1.01	1.96	1.99	2.54	2.93
∞	1	1.96	2	2.58	3

附表7 不同均匀分布和表

当 $\delta_i \sim U[-a_i, a_i]$ 时 $\sum_{i=1}^{4}\delta_i$的

1. 标准差σ值；

2. 对应于置信概率 $p=.6827$, .95, .9545, .99, .9973时的置信因子k值；

3. $x=\sigma$, $0.5(0.5)\left[\frac{\sum a_i}{0.5}\right]0.5$ 之

$$P(x)=P\left(\left|\sum_{i=1}^{4}\delta_i\right|<x\right)\text{值。}$$

$a_1=1,\quad a_2=1,\quad a_3=1$

a_4		1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
σ		1.1547	1.1269	1.1015	1.0786	1.0583	1.0408	1.0263	1.0149	1.0066	1.0017	1.0000
k	.6827	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03
	.95	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94
	.9545	1.98	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97
	.99	2.44	2.44	2.44	2.43	2.42	2.41	2.40	2.39	2.38	2.38	2.38
	.9973	2.73	2.73	2.72	2.71	2.70	2.68	2.66	2.63	2.61	2.60	2.60
P	σ	.6693	.6692	.6689	.6685	.6681	.6677	.6673	.6670	.6668	.6667	.6667
	.5	.3239	.3313	.3381	.3442	.3496	.3542	.3579	.3608	.3629	.3642	.3646
	1.0	.5990	.6106	.6213	.6312	.6400	.6478	.6543	.6596	.6635	.6658	.6667
	1.5	.7979	.8092	.8195	.8288	.8369	.8438	.8494	.8538	.8569	.8588	.8594
	2.0	.9167	.9246	.9317	.9379	.9433	.9479	.9517	.9546	.9567	.9579	.9583
	2.5	.9736	.9778	.9814	.9846	.9873	.9896	.9915	.9929	.9940	.9946	.9948
	3.0	.9948	.9962	.9973	.9982	.9989	.9993	.9997	.9999	1.0000	1.0000	1
	3.5	.9997	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1					
	4.0	1										

$a_1=1, \quad a_2=1, \quad a_3=0.9$

	a_4	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	1.0985	1.0724	1.0488	1.0279	1.0100	.9950	.9832	.9747	.9695	.9678
k	.6827	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03
	.95	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94
	.9545	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97
	.99	2.44	2.44	2.43	2.42	2.41	2.40	2.39	2.38	2.38	2.38
	.9973	2.73	2.72	2.71	2.70	2.68	2.66	2.63	2.61	2.60	2.60
P	σ	.6691	.6689	.6685	.6680	.6675	.6670	.6666	.6664	.6662	.6661
	.5	.3393	.3467	.3534	.3593	.3644	.3685	.3718	.3741	.3755	.3759
	1.0	.6229	.6344	.6449	.6543	.6626	.6695	.6751	.6792	.6817	.6825
	1.5	.8210	.8317	.8413	.8496	.8568	.8626	.8671	.8704	.8723	.8730
	2.0	.9325	.9396	.9458	.9512	.9558	.9596	.9625	.9646	.9658	.9662
	2.5	.9810	.9850	.9879	.9904	.9924	.9941	.9954	.9963	.9969	.9970
	3.0	.9974	.9933	.9989	.9994	.9997	.9999	1.0000	1.0000	1	
	3.5	.9999	1.0000	1.0000	1						

$a_1=1, \quad a_2=1, \quad a_3=0.8$

a_4		.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
σ		1.0456	1.0214	1.0000	.9815	.9661	.9539	.9452	.9399	.9381
k	.6827	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04
	.95	1.94	1.94	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93
	.9545	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97
	.99	2.44	2.43	2.42	2.41	2.40	2.38	2.38	2.37	2.37
	.9973	2.72	2.71	2.69	2.67	2.65	2.63	2.61	2.59	2.59
P	σ	.6686	.6681	.6675	.6668	.6662	.6656	.6652	.6649	.6647
	.5	.3547	.3619	.3684	.3740	.3786	.3823	.3849	.3865	.3870
	1.0	.6465	.6576	.6675	.6761	.6834	.6892	.6933	.6958	.6967
	1.5	.8427	.8526	.8613	.8687	.8747	.8795	.8829	.8849	.8856
	2.0	.9467	.9529	.9583	.9629	.9667	.9696	.9717	.9729	.9733
	2.5	.9881	.9907	.9929	.9947	.9961	.9972	.9980	.9984	.9986
	3.0	.9989	.9994	.9997	.9999	1.0000	1.0000	1		
	3.5	1.0000	1							

$a_1=1,\quad a_2=1,\quad a_3=0.7$

	a_4	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	.9967	.9747	.9557	.9399	.9274	.9183	.9129	.9110
k	.6827	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04
	.95	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93
	.9545	1.97	1.97	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96
	.99	2.42	2.41	2.40	2.39	2.37	2.37	2.36	2.36
	.9973	2.70	2.68	2.67	2.64	2.62	2.59	2.58	2.57
P	σ	.6675	.6667	.6658	.6649	.6640	.6633	.6629	.6627
	.5	.3698	.3768	.3830	.3882	.3923	.3952	.3970	.3976
	1.0	.6691	.6795	.6884	.6958	.7017	.7058	.7083	.7092
	1.5	.8028	.8717	.8794	.8857	.8907	.8943	.8964	.8971
	2.0	.9592	.9646	.9692	.9729	.9758	.9779	.9792	.9796
	2.5	.9930	.9849	.9964	.9976	.9984	.9990	.9994	.9995
	3.0	.9997	.9999	1.0000	1.0000	1			

$a_1=1.\quad a_2=1.\quad a_3=0.8$

	a_4	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	.9522	.9327	.9165	.9037	.8944	.8888	.8800
k	.6827	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05
	.95	1.93	1.93	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92
	.9545	1.96	1.96	1.96	1.95	1.95	1.95	1.95
	.99	2.40	2.39	2.37	2.36	2.35	2.34	2.34
	.9973	2.67	2.65	2.63	2.60	2.57	2.56	2.55
P	σ	.6656	.6644	.6632	.6620	.6611	.6606	.6603
	.5	.3844	.3912	.3969	.4014	.4049	.4069	.4076
	1.0	.6901	.6992	.7067	.7125	.7167	.7192	.7200
	1.5	.8810	.8889	.8955	.9007	.9045	.9068	.9076
	2.0	.9700	.9746	.9783	.9812	.9833	.9846	.9850
	2.5	.9965	.9978	.9986	.9993	.9996	.9999	9999
	3.0	1.0000	1.0000	1				

$a_1=1, \quad a_2=1, \quad a_3=0.5$

	a_4	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	.9129	.8903	.8832	.8737	.8679	.8660
k	.6827	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05
	.95	1.92	1.92	1.92	1.91	1.91	1.91
	.9545	1.95	1.95	1.95	1.94	1.94	1.94
	.99	2.37	2.36	2.34	2.33	2.32	2.32
	.9973	2.66	2.60	2.57	2.54	2.53	2.52
P	σ	.6629	.6613	.6598	.6587	.6579	.6577
	.5	.3984	.4047	.4097	.4135	.4159	.4167
	1.0	.7083	.7158	.7217	.7258	.7283	.7292
	1.5	.8971	.9040	.9094	.9134	.9158	.9167
	2.0	.9792	.9829	.9858	.9879	.9892	.9896
	2.5	.9987	.9993	.9997	.9999	1.0000	1
	3.0	1					

		$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=0.4$					$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=0.3$			
a_4		.4	.3	.2	.1	.0	.3	.2	.1	.0
σ		.8794	.8660	.8563	.8505	.8485	.8524	.8426	.8367	.8347
k	.6827	1.05	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06
	.95	1.91	1.91	1.91	1.91	1.91	1.91	1.90	1.90	1.90
	.9545	1.94	1.94	1.94	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93
	.99	2.34	2.32	2.30	2.29	2.29	2.29	2.27	2.26	2.26
	.9973	2.57	2.54	2.51	2.49	2.48	2.50	2.47	2.44	2.43
P	σ	.6594	.6577	.6563	.6555	.6552	.6558	.6543	.6533	.6530
	.5	.4114	.4168	.4208	.4233	.4242	.4225	.4267	.4292	.4300
	1.0	.7233	.7292	.7333	.7358	.7367	.7350	.7392	.7417	.7425
	1.5	.9111	.9167	.9208	.9233	.9242	.9225	.9267	.9292	.9300
	2.0	.9867	.9896	.9917	.9929	.9933	.9925	.9946	.9958	.9962
	2.5	.9997	.9999	1.0000	1		1.0000	1		

		$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=0.2$			$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=0.1$		$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=0.0$
a_4		.2	.1	.0	.1	.0	.0
σ		.8327	.8266	.8246	.8206	.8185	.8165
k	.6827	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07
	.95	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90
	.9545	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93
	.99	2.25	2.23	2.23	2.21	2.21	2.20
	.9973	2.43	2.39	2.38	2.35	2.34	2.32
P	σ	.6527	.6516	.6513	.6506	.6502	.6498
	.5	.4308	.4333	.4342	.4358	.4367	.4375
	1.0	.7433	.7458	.7467	.7483	.7492	.7500
	1.5	.9308	.9333	.9342	.9358	.9367	.9375
	2.0	.9967	.9979	.9983	.9992	.9996	1

$a_1=1,\quad a_2=0.9,\quad a_3=0.9$

	a_4	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	1.0693	1.0424	1.0182	.9967	.9781	.9626	.9504	.9416	.9363	.9345
k	.6827	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03
	.95	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94
	.9545	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97
	.99	2.44	2.44	2.43	2.43	2.41	2.40	2.39	2.38	2.38	2.38
	.9973	2.73	2.72	2.71	2.70	2.68	2.66	2.63	2.61	2.60	2.60
P	σ	.6691	.6689	.6685	.6681	.6675	.6670	.6666	.6663	.6661	.6661
	.5	.3480	.3561	.3634	.3699	.3755	.3801	.3837	.3863	.3879	.3884
	1.0	.6361	.6484	.6596	.6697	.6786	.6860	.6920	.6964	.6991	.7000
	1.5	.8332	.8443	.8542	.8629	.8703	.8763	.8810	.8843	.8863	.8870
	2.0	.9403	.9473	.9535	.9588	.9634	.9671	.9700	.9720	.9733	.9737
	2.5	.9852	.9882	.9908	.9930	.9947	.9961	.9972	.9980	.9985	.9986
	3.0	.9983	.9930	.9994	.9997	.9999	1.0000	1.0000	1		
	3.5	1.0000	1.0000	1							

$a_1=1, \quad a_2=0.9, \quad a_3=0.8$

a_4		.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
σ		1.0149	.9899	.9678	.9487	.9327	.9201	.9110	.9055	.9037
k	.6827	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04
	.95	1.94	1.94	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93
	.9545	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97
	.99	2.44	2.43	2.42	2.41	2.40	2.39	2.38	2.37	2.37
	.9973	2.72	2.71	2.70	2.68	2.66	2.63	2.61	2.59	2.59
P	σ	.6687	.6683	.6677	.6671	.6664	.6659	.6654	.6651	.6650
	.5	.3648	.3728	.3800	.3861	.3912	.3953	.3981	.3999	.4005
	1.0	.6614	.6733	.6840	.6934	.7012	.7075	.7120	.7148	.7157
	1.5	.8558	.8661	.8750	.8826	.8889	.8937	.8972	.8993	.9000
	2.0	.9542	.9603	.9656	.9700	.9737	.9765	.9785	.9797	.9802
	2.5	.9910	.9932	.9951	.9965	.9977	.9985	.9991	.9994	.9995
	3.0	.9994	.9997	.9999	1.0000	1.0000	1			
	3.5	1								

$a_1=1$, $a_2=0.9$, $a_3=0.7$

a_4		.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
σ		.9644	.9416	.9220	.9055	.8926	.8832	.8775	.8756
k	.6827	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04
	.95	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93
	.9545	1.97	1.97	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96
	.99	2.43	2.42	2.41	2.39	2.38	2.37	2.36	2.36
	.9973	2.70	2.69	2.67	2.65	2.62	2.60	2.58	2.58
P	σ	.6678	.6670	.6662	.6653	.6644	.6637	.6633	.6631
	.5	.3815	.3892	.3960	.4016	.4061	.4094	.4114	.4120
	1.0	.6858	.6970	.7068	.7149	.7213	.7259	.7287	.7296
	1.5	.8766	.8859	.8938	.9003	.9054	.9091	.9112	.9120
	2.0	.9663	.9714	.9758	.9794	.9821	.9841	.9853	.9857
	2.5	.9952	.9967	.9979	.9987	.9993	.9997	.9999	.9999
	3.0	.9999	1.0000	1.0000	1				

$a_1=1, \quad a_2=0.9, \quad a_3=0.6$

	a_4	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	.9183	.8981	.8813	.8679	.8583	.8524	.8505
k	.6827	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05
	.95	1.93	1.93	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92
	.9545	1.96	1.96	1.96	1.96	1.95	1.95	1.95
	.99	2.41	2.40	2.38	2.37	2.35	2.35	2.34
	.9973	2.68	2.66	2.63	2.61	2.58	2.56	2.55
P	σ	.6660	.6649	.6636	.6625	.6615	.6609	.6607
	.5	.3976	.4049	.4111	.4162	.4198	.4221	.4228
	1.0	.7086	.7186	.7269	.7333	.7380	.7407	.7417
	1.5	.8954	.9037	.9105	.9159	.9198	.9221	.9228
	2.0	.9765	.9807	.9842	.9869	.9888	.9900	.9904
	2.5	.9979	.9988	.9994	.9997	.9999	1.0000	1
	3.0	1.0000	1					

$a_1=1,\quad a_2=0.9,\quad a_3=0.6$

	a_4	.5	4.	.3	.2	.1	.0
	σ	.8775	.8602	.8466	.8367	8307	.8287
k	.6827	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05
	.95	1.92	1.92	1.92	1.91	1.91	1.91
	.9545	1.96	1.95	1.95	1.95	1.94	1.94
	.99	2.38	2.36	2.35	2.33	2.32	2.32
	.9973	2.64	2.61	2.58	2.55	2.53	2.52
P	σ	.6683	.6617	.6603	.6591	.6583	.6580
	.5	.4129	.4196	.4251	.4292	.4317	.4325
	1.0	.7287	.7370	.7435	.7481	.7509	.7519
	1.5	.9123	.9194	.9251	.9292	.9317	.9325
	2.0	.9848	.9881	.9907	.9926	.9937	9941
	2.5	.9994	.9998	.9999	1.0000	1	

		$a_1=1$,	$a_2=0.9$,	$a_3=0.4$			$a_1=1$,	$a_2=0.9$,	$a_3=0.3$	
a_4		.4	.3	.2	.1	.0	.3	.2	.1	.0
σ		8426	.8286	.8185	.8124	.8103	.8145	8042	.7979	.7958
k	.6827	1.05	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06
	.95	1.91	1.91	1.91	1.91	1.91	1.91	1.90	1.90	1.90
	.9545	1.95	1.94	1.94	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93
	.99	2.34	2.32	2.31	2.30	2.29	2.30	2.28	2.26	2.26
	.9973	2.58	2.55	2.52	2.49	2.49	2.51	2.48	2.45	2.44
P	σ	.6598	.6580	.6566	6557	.6554	6560	.6544	.6534	.6530
	.5	.4269	.4328	.4372	.4398	4407	.4390	.4435	.4463	.4472
	1.0	7454	.7519	.7565	.7593	.7602	.7583	.7630	.7657	.7667
	1.5	.9269	9328	.9372	.9398	.9407	.9390	.9435	.9463	9472
	2.0	.9913	.9938	.9955	9985	9969	.9960	.9975	.9985	9988
	2.5	.9999	1.0000	1			1			

	a_4	$a_1=1$, $a_2=0.9$, $a_3=0.2$			$a_1=1$, $a_2=0.9$, $a_3=0.1$		$a_1=1$, $a_2=0.9$, $a_3=0.0$
		.2	.1	.0	.1	.0	.0
	σ	.7937	.7874	.7853	.7810	.7789	.7767
k	.6827	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07
	.95	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90
	.9545	1.93	.193	1.93	1.93	1.93	1.93
	.99	2.25	2.23	2.23	2.21	2.21	2.20
	.9973	2.43	2.40	2.39	2.35	2.34	2.32
P	σ	.6526	.6515	.6511	.6503	.6499	.6495
	.5	.4481	.4509	.4519	.4537	.4546	.4556
	1.0	.7676	.7704	.7713	.7731	.7741	.7750
	1.5	.9481	.9500	.9519	.9537	.9546	.9556
	2.0	.9988	.9995	.9998	.9999	1	

$a_1=1,\quad a_2=0.8,\quad a_3=0.8$

a_4		.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
σ		.9866	.9609	.9381	.9183	.9018	.8888	.8794	.8737	.8718
k	.6827	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04
	.95	1.94	1.94	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93
	.9545	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97	1.96	1.96	1.96	1.96
	.99	2.44	2.43	2.42	2.41	2.40	2.39	2.38	2.37	2.37
	.9973	2.72	2.71	2.70	2.68	2.66	2.63	2.61	2.59	2.59
P	σ	.6685	.6681	.6675	.6668	.6660	.6653	.6647	.6644	.6642
	.5	.3744	.3831	.3908	.3976	.4032	.4076	.4108	.4128	.4134
	1.0	.6753	.6880	.6994	.7093	.7177	.7244	.7293	.7323	.7333
	1.5	.8677	.8783	.8876	.8954	.9019	.9069	.9105	.9126	.9133
	2.0	.9609	.9668	.9719	.9762	.9797	.9824	.9844	.9855	.9859
	2.5	.9933	.9952	.9967	.9979	.9987	.9993	.9997	.9999	.9999
	3.0	.9997	.9999	1.0000	1.0000	1				

$a_1=1,\quad a_2=0.8,\quad a_3=0.7$

a_4		.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
σ		.9345	.9110	.8907	.8737	.8602	.8505	.8446	.8426
k	.6827	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04
	.95	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93
	.9545	1.97	1.97	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96
	.99	2.43	2.42	2.41	2.39	2.38	2.37	2.36	2.36
	.9973	2.71	2.69	2.68	2.65	2.62	2.60	2.58	2.57
P	σ	.6676	.6668	.6659	.6649	.6640	6632	.6627	.6625
	.5	.3924	.4008	.4082	.4143	.4191	.4227	.4249	.4256
	1.0	.7014	.7134	.7239	.7327	.7397	.7448	.7479	.7490
	1.5	.8892	.8988	.9070	.9137	.9189	.9226	.9249	.9256
	2.0	.9724	.9773	.9814	9847	.9874	.9892	.9903	.9907
	2.5	.9968	.9980	.9988	.9994	.9997	.9999	1.0000	1
	3.0	1.0000	1.0000	1					

$a_1=1, \quad a_2=0.8, \quad a_3=0.8$

	a_4	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	.8869	.8660	8485	.8347	.8246	.8185	.8165
k	.6827	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05
	.95	1.93	1.93	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92
	.9545	1.96	1.96	1.96	1.95	1.95	1.95	1.95
	.99	2.41	2.40	2.38	2.37	2.35	2.35	2.34
	.9973	2.68	2.66	2.64	2.61	2.58	2.56	2.55
P	σ	.6659	.6646	.6633	.6621	.6611	.6604	.6602
	.5	.4099	.4178	.4244	.4297	.4336	.4359	.4367
	1.0	.7259	.7368	.7459	.7531	.7583	.7615	.7625
	1.5	.9087	.9172	.9242	.9297	.9336	.9359	.9367
	2.0	.9819	.9858	.9889	.9913	.9931	.9941	.9944
	2.5	.9989	.9994	.9998	.9999	1.0000	1	
	3.0	1						

$a_1=1$, $a_2=0.8$, $a_3=0.5$

	a_4	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	.8446	.8266	.8124	.8021	.7958	.7937
k	.6827	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05
	.95	1.92	1.92	1.91	1.91	1.91	1.91
	.9545	1.95	1.95	1.95	1.94	1.94	1.94
	.99	2.38	2.37	2.35	2.33	2.32	2.32
	.9973	2.64	2.62	2.59	2.55	2.53	2.52
P	σ	.6631	.6614	.6598	.6586	.6578	.6575
	.5	.4263	.4334	4392	.4433	.4458	.4467
	1.0	.7480	.7573	.7646	.7698	.7729	.7740
	1.5	.9260	.9334	9392	.9433	.9458	.9467
	2.0	.9893	.9922	9944	.9959	.9969	.9972
	2.5	.9998	.9999	1.0000	1		

		$a_1=1,\ a_2=0.8,\ a_3=0.4$					$a_1=1,\ a_2=0.8,\ a_3=0.3$			
a_4		.4	.3	.2	.1	.0	.3	.2	.1	.0
σ		.8083	.7937	.7832	.7767	.7746	.7789	.7681	.7616	.7594
k	.6827	1.05	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06
	.95	1.91	1.91	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90
	.9545	1.94	1.94	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.92	1.92
	.99	2.35	2.32	2.31	2.30	2.29	2.30	2.28	2.26	2.26
	.9973	2.59	2.55	2.52	2.49	2.49	2.52	2.48	2.45	2.44
P	σ	.6594	.6575	.6561	.6551	.6548	.6554	.6537	.6526	.6522
	.5	.4411	.4472	.4517	.4544	.4553	.4537	.4585	.4615	.4625
	1.0	.7667	.7740	.7792	.7823	.7833	.7812	.7865	.7896	.7906
	1.5	.9411	.9472	.9517	.9544	.9553	.9537	.9585	.9615	.9625
	2.0	.9947	.9966	.9979	.9987	.9990	.9981	.9991	.9997	.9998
	2.5	1.0000	1							

		$a_1=1.$ $a_2=0.8,$ $a_3=0.2$			$a_1=1,$ $a_2=0.8,$ $a_3=0.1$		$a_1=1.$ $a_2=0.8$ $a_3=0.0$
a_4		.2	.1	.0	.1	.0	.0
σ		.7572	.7506	.7483	.7439	.7416	.7394
k	.6827	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07
	.95	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89
	.9545	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92
	.99	2.25	2.23	2.22	2.21	2.20	2.19
	.9973	2.43	2.39	2.38	2.35	2.33	2.31
P	σ	.6518	.6506	.6502	.6493	.6489	.6485
	.5	.4636	.4667	.4677	.4698	.4708	.4719
	1.0	.7917	.7948	.7958	.7979	.7990	.8000
	1.5	.9636	.9667	.9677	.9698	.9708	.9719
	2.0	.9997	1.0000	1	1		

$a_1=1,\quad a_2=0.7,\quad a_3=0.7$

a_4		.7	6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
σ		.9074	.8832	.8622	.8446	8307	.8206	.8145	.8124
k	.6827	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04
	.95	1.93	1.93	1.93	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92
	.9545	1.97	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.95
	.99	2.42	2.42	2.40	2.39	2.37	2.36	2.35	2.35
	.9973	2.70	2.69	2.67	2.65	2.62	2.59	2.57	2.56
P	σ	.6670	6662	.6651	.6639	.6628	.6618	.6611	.6609
	.5	.4025	.4116	.4194	.4260	.4312	.4350	.4372	.4380
	1.0	.7156	.7284	.7396	.7490	.7565	.7621	.7655	.7667
	1.5	.9006	.9105	.9189	.9258	.9311	.9349	.9372	.9380
	2.0	.9778	.9823	.9861	.9891	.9915	.9932	9942	.9946
	2.5	.9980	.9989	.9995	.9998	.9999	1.0000	1	
	3.0	1.0000	1						

$a_1=1,\quad a_2=0.7,\quad a_3=0.8$

a_4		.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
σ		.8583	.8367	.8185	.8042	.7937	.7874	.7853
k	.6827	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05
	.95	1.93	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92
	.9545	1.96	1.96	1.95	1.95	1.96	1.95	1.95
	.99	2.41	2.39	2.38	2.36	2.35	2.34	2.34
	.9973	2.68	2.66	2.63	2.60	2.57	2.55	2.55
P	σ	.6651	.6638	.6623	.6608	.6596	.6588	.6585
	.5	.4212	.4296	.4366	.4421	.4460	.4484	.4492
	1.0	.7419	.7537	.7636	.7716	.7774	.7810	.7821
	1.5	.9207	.9294	.9365	.9421	.9460	.9484	.9492
	2.0	.9864	.9898	.9926	.9946	.9961	.9970	.9973
	2.5	.9995	.9998	1.0000	1.0000			

$a_1=1$, $a_2=0.7$, $a_3=0.5$

	a_4	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	.8145	.7958	.7810	.7703	.7638	.7616
k	.6827	1.04	1.06	1.05	1.05	1.05	1.05
	.95	1.92	1.91	1.91	1.91	1.91	1.91
	.9545	1.95	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94
	.99	2.38	2.36	2.34	2.33	2.32	2.31
	.9973	2.64	2.61	2.58	2.56	2.53	2.52
P	σ	.6621	.6602	.6584	.6570	.6560	.6557
	.5	.4384	.4458	.4517	.4558	.4583	.4592
	1.0	.7660	.7763	.7845	.7905	.7940	.7952
	1.5	.9384	.9458	.9517	.9558	.9583	.9592
	2.0	.9929	.9952	.9969	.9981	.9988	.9990
	2.5	1.0000	1.0000	1			

		$a_1=1,\ a_2=0.7,\ a_3=0.4$					$a_1=1,\ a_2=0.7,\ a_3=0.3$			
a_4		.4	.3	.2	.1	.0	.3	.2	.1	.0
σ		.7767	.7616	.7506	.7439	.7416	.7461	.7348	.7280	.7257
k	.6827	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.07
	.95	1.91	1.90	1.90	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89
	.9545	1.94	1.93	1.93	1.92	1.92	1.92	1.92	1.91	1.91
	.99	2.34	2.32	2.30	2.29	2.28	2.29	2.27	2.25	2.25
	.9973	2.59	2.55	2.51	2.49	2.48	2.51	2.47	2.44	2.43
P	σ	.6580	.6559	.6543	.6533	.6529	.6536	.6518	.6509	.6503
	.5	.4536	.4598	.4643	.4670	.4679	.4664	.4712	.4742	.4752
	1.0	.7869	.7952	.8012	.8048	.8060	.8036	.8095	.8131	.8143
	1.5	.9536	.9598	.9643	.9670	.9679	.9664	.9712	.9742	.9752
	2.0	.9971	.9984	.9992	.9997	.9999	.9993	.9998	1.0000	1
	2.5	1								

		$a_1=1,\ a_2=0.7,\ a_3=0.2$			$a_1=1,\ a_2=0.7,\ a_3=0.1$		$a_1=1,\ a_2=0.7,\ a_3=0.0$
a_4		.2	.1	.0	.1	.0	.0
σ		.7234	.7165	.7141	.7095	.7071	.7047
k	.6827	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07
	.95	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88
	.9545	1.91	1.91	1.91	1.91	1.91	1.91
	.99	2.24	2.22	2.21	2.19	2.18	2.17
	.9973	2.42	2.38	2.37	2.33	2.31	2.29
P	σ	.6499	.6486	.6481	.6472	.6467	.6462
	.5	.4765	.4798	.4810	.4833	.4845	.4857
	1.0	.8155	.8190	.8202	.8226	.8238	.8250
	1.5	.9765	.9798	.9801	.9833	.9845	.9857
	2.0	1.0000	1				

$a_1=1, \quad a_2=0.6, \quad a_3=0.6$

	a_4	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	.8327	.8103	.7916	.7767	.7659	.7594	.7572
k	.6827	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05
	.95	1.92	1.92	1.91	1.91	1.91	1.91	1.91
	.9545	1.96	1.95	1.95	1.94	1.94	1.94	1.94
	.99	2.40	2.39	2.37	2.35	2.33	2.32	2.32
	.9973	2.67	2.65	2.62	2.59	2.56	2.54	2.53
P	σ	.6639	.6623	.6605	.6587	.6572	.6661	.6557
	.5	.4313	.4401	.4473	.4530	.4571	.4595	4603
	1.0	.7562	.7689	.7796	.7883	.7947	.7986	.8000
	1.5	.9311	.9400	.9473	.9530	.9571	.9595	.9603
	2.0	.9901	.9931	9953	.9970	.9981	9988	.9991
	2.5	.9998	1.0000	1.0000	1.			

$a_1=1,\quad a_2=0.6,\quad a_3=0.5$

	a_4	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	.7874	.7681	.7528	.7416	.7348	.7326
k	.6827	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06
	.95	1.91	1.91	1.90	1.90	1.90	1.90
	.9545	1.94	1.94	1.93	1.93	1.93	1.93
	.99	2.37	2.35	2.33	2.31	2.30	2.30
	.9973	2.63	2.60	2.57	2.54	2.51	2.50
P	σ	.6604	.6582	.6561	.6541	.6529	.6524
	.5	.4492	.4567	.4625	.4667	.4692	.4700
	1.0	.7823	.7938	.8030	.8097	.8139	.8153
	1.5	.9492	.9567	.9625	.9667	.9692	.9700
	2.0	.9955	.9973	.9985	.9993	.9997	.9999
	2.5	1.0000	1				

		$a_1=1,\ a_2=0.6,\ a_3=0.4$					$a_1=1,\ a_2=0.6,\ a_3=0.3$			
a_4		.4	.3	.2	.1	.0	.3	.2	.1	.0
σ		.7483	.7326	.7211	7141	.7118	.7165	.7047	.6976	.6952
k	.6827	1.05	1.06	1.06	1.06	1.07	1.06	1.07	1.07	1.07
	.95	1.90	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87
	.9545	1.93	1.92	1.91	1.91	1.91	1.91	1.90	1.90	1.90
	.99	2.33	2.31	2.29	2.27	2.27	2.28	2.25	2.23	2.23
	.9973	2.58	2.54	2.50	2.47	2.46	2.50	2.46	2.42	2.41
P	σ	.6556	6531	.6510	.6497	.6492	.6504	.6482	.6469	.6464
	.5	.4644	4705	.4748	.4774	.4783	.4769	.4815	.4843	.4852
	1.0	.8057	.8153	.8222	.8264	.8278	.8250	.8319	.8361	.8375
	1.5	.9644	9705	.9748	.9774	.9783	.9769	.9815	.9843	.9852
	2.0	.9986	.9994	.9998	1.0000	1	.9998	1.0000	1	

		$a_1=1$, $a_2=0.6$, $a_3=0.2$			$a_1=1$, $a_2=0.6$, $a_3=0.1$		$a_1=1$, $a_2=0.6$, $a_3=0.0$
a_4		.2	.1	.0	.1	.0	.0
σ		.6928	.6856	.6831	.6782	.6758	.6733
k	.6827	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.08
	.95	1.87	1.86	1.86	1.86	1.86	1.86
	.9545	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89
	.99	2.22	2.19	2.19	2.16	2.15	2.15
	.9973	2.40	2.36	2.34	2.31	2.28	2.26
P	σ	.6460	.6446	.6442	.6432	.6427	.6422
	.5	.4865	.4896	.4906	.4931	.4944	.4958
	1.0	.8389	.8431	.8444	.8472	.8486	.8500
	1.5	.9865	.9896	.9906	.9931	.9944	.9958
	2.0	1					

$a_1=-1$, $a_2=0.5$ $a_3=0.6$

	a_4	.5	.4	.3	.2	.1	.0
	σ	.7638	.7439	.7280	.7165	.7095	.7071
k	.6827	1.05	1.05	1.06	1.06	1.07	1.07
	.95	1.90	1.90	1.89	1.88	1.88	1.88
	.9545	1.93	1.93	1.92	1.91	1.91	1.91
	.99	2.36	2.34	2.31	2.29	2.28	2.27
	.9973	2.61	2.58	2.55	2.51	2.48	2.47
P	σ	.6581	.6555	.6528	.6504	.6488	.6482
	.5	.4583	.4658	.4717	.4758	.4783	.4792
	1.0	.7969	.8093	.8195	8270	.8317	.8333
	1.5	.9583	.9658	.9717	.9758	.9783	.9792
	2.0	.9974	.9987	.9994	.9998	1.0000	1
	2.5	1					

a_4		$a_1=1$, $a_2=0.5$, $a_3=0.4$					$a_1=1$, $a_2=0.5$, $a_3=0.3$			
		.4	.3	.2	.1	.0	.3	2.	.1	.0
σ		.7234	.7071	.6952	.6880	.6856	.6904	.6782	.6708	.6683
k	.6827	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08
	.95	1.89	1.88	1.87	1.87	1.86	1.86	1.86	1.85	1.85
	.9545	1.92	1.91	1.90	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.87
	.99	2.31	2.29	2.26	2.25	2.24	2.26	2.23	2.21	2.20
	.9973	2.56	2.52	2.47	2.44	2.43	2.48	2.43	2.39	2.37
P	σ	.6523	.6491	.6463	.6444	.6437	.6455	.6425	.6405	.6398
	.5	.4733	.4792	.4833	.4858	.4867	.4850	.4892	.4917	.4925
	1.0	.8227	.8336	.8417	.8467	.8483	.8450	.8533	.8583	.8600
	1.5	.9733	.9792	.9833	.9858	.9867	.9850	.9892	.9917	.9925
	2.0	.9995	.9999	1.0000	1		1.0000	1		

		$a_1=1,\ a_2=0.5,\ a_3=0.2$			$a_1=1,\ a_2=0.5,\ a_3=0.1$		$a_1=1,\ a_2=0.5,\ a_3=0.0$
a_4		.2	.1	.0	.1	.0	.0
σ		.6658	.6583	.6557	.6506	.6481	.6455
k	.6827	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09	1.09
	.95	1.85	1.84	1.84	1.84	1.83	1.83
	.9545	1.87	1.86	1.86	1.86	1.86	1.86
	.99	2.19	2.16	2.15	2.13	2.12	2.10
	.9973	2.37	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21
P	σ	.6395	.6376	.6370	.6360	.6354	.6349
	.5	.4933	.4958	.4967	.4983	.4992	.5000
	1.0	.8617	.8667	.8683	8717	.8733	.8750
	1.5	.9933	.9958	.9967	.9983	.9992	1

		$a_1=1$, $a_2=0.4$, $a_3=0.4$					$a_1=1$, $a_2=0.4$, $a_3=0.3$			
a_4		.4	.3	.2	.1	.0	.3	.2	.1	.0
σ		.7024	.6856	.6733	.6658	.6633	.6683	.6557	.6481	.6455
k	.6827	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09
	.95	1.87	1.86	1.85	1.85	1.84	1.84	1.83	1.82	1.82
	.9545	1.90	1.89	1.88	1.87	1.87	1.87	1.86	1.85	1.85
	.99	2.29	2.26	2.23	2.21	2.20	2.23	2.19	2.17	2.16
	.9973	2.52	2.48	2.44	2.40	2.38	2.44	2.39	2.34	2.33
P	σ	.6484	.6444	.6408	.6383	.6374	.6395	.6352	.6322	.6312
	.5	.4805	.4859	.4898	.4922	.4930	.4910	.4944	.4965	.4972
	1.0	.8375	.8497	.8589	.8646	.8667	.8630	.8730	.8792	.8812
	1.5	.9805	.9859	.9898	.9922	.9930	.9910	.9944	.9965	.9972
	2.0	.9999	1.0000	1			1			

		$a_1=1$, $a_2=0.4$, $a_3=0.2$			$a_1=1$, $a_2=0.4$, $a_3=0.1$		$a_1=1$, $a_2=0.4$, $a_3=0.0$
a_4		.2	.1	.0	.1	.0	.0
σ		.6429	.6951	.6325	.6272	.6245	.6218
k	.6827	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.11
	.95	1.82	1.81	1.81	1.80	1.80	1.80
	.9545	1.84	1.83	1.83	1.82	1.82	1.82
	.99	2.15	2.12	2.11	2.08	2.06	2.05
	.9973	2.33	2.28	2.26	2.21	2.18	2.15
P	σ	.6304	.6271	.6259	.6237	.6225	.6215
	.5	.4974	.4990	.4995	.4999	.5000	.5000
	1.0	.8833	.8896	.8917	.8958	.8979	.9000
	1.5	.9974	.9990	.9995	.9999	1	

		$a_1=1,\ a_2=0.3,\ a_3=0.3$				$a_1=1,\ a_2=0.3,\ a_3=0.2$		
a_4		.3	.2	.1	.0	.2	.1	.0
σ		.6506	.6377	.6298	.6272	.6245	.6164	.6137
k	.6827	1.09	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12
	.95	1.82	1.81	1.80	1.79	1.78	1.77	1.77
	.9545	1.85	1.83	1.82	1.82	1.81	1.79	1.79
	.99	2.19	2.15	2.12	2.11	2.10	2.06	2.05
	.9973	2.39	2.34	2.28	2.26	2.27	2.21	2.19
P	σ	.6329	.6271	.6231	.6217	.6197	.6145	.6127
	.5	.4951	.4977	.4991	.4995	.4993	.4999	5000
	1.0	.8781	.8898	.8973	.9000	.9029	.9111	.9139
	1.5	.9951	.9977	.9991	.9995	.9993	.9999	1

		$a_1=1,\ a_2=0.3,\ a_3=0.1$		$a_1=1, a_2=0.3, a_3=0.0$	$a_1=1,\ a_2=0.2,\ a_3=0.2$		
a_4		.1	.0	.0	.2	.1	.0
σ		.6083	.6055	.6028	.6110	.6028	6000
k	.6827	1.13	1.13	1.13	1.12	1.14	1.14
	.95	1.76	1.75	1.75	1.75	1.73	1.73
	.9545	1.78	1.77	1.77	1.78	1.75	1.75
	.99	2.01	1.99	1.97	2.04	2.00	1.98
	.9973	2.14	2.11	2.06	2.20	2.13	2.10
P	σ	.6080	.6055	.6028	.6097	.6026	.6000
	.5	.5000	.5000	.5000	.4999	.5000	.5000
	1.0	.9194	.9222	.9250	.9188	.9294	.9333
	1.5	1.0000			.9999	1	

		$a_1=1,\ a_2=0.2,\ a_3=0.1$		$a_1=1, a_2=0.2, a_3=0.0$	$a_1=1, a_2=0.1, a_3=0.1$		$a_1=1, a_2=0.1, a_3=0.0$	$a_1=1, a_2=0.0, a_3=0.0$
a_4		.1	.0	.0	.1	.0	.0	.0
σ		5944	5916	.5888	.5859	.5831	.5802	.5774
k	.6827	1.15	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18
	95	1.71	1.70	1.70	1.68	1.66	1.65	1.65
	.9545	1.73	1.72	1.71	1.69	1.68	1.66	1.65
	.99	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.79	1.71
	9973	2.05	2.01	1.96	1.96	1.91	1.84	1.73
P	σ	.5944	.5916	.5888	.5859	.5831	.5802	.5774
	.5	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000
	1.0	9417	.9458	.9500	.9594	.9667	.9750	1
	1.5							

附表 8　$\Gamma(X)$函数表

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.0	1.00000	0.99433	0.98884	0.98355	0.97844	0.97350	0.96874	0.96415	0.95973	0.95546
1.1	0.95135	0.94740	0.94359	0.93993	0.93642	0.93304	0.92980	0.92670	0.92373	0.92089
1.2	0.91817	0.91558	0.91311	0.91075	0.90852	0.90640	0.90440	0.90250	0.90072	0.89904
1.3	0.89747	0.89600	0.89464	0.89338	0.89222	0.89115	0.89018	0.88931	0.88854	0.88785
1.4	0.88726	0.88676	0.88636	0.88604	0.88581	0.88566	0.88560	0.88563	0.88575	0.88595
1.5	0.88623	0.88659	0.88704	0.88757	0.88818	0.88887	0.88964	0.89049	0.89142	0.89243
1.6	0.89352	0.89468	0.89592	0.89724	0.89864	0.90012	0.90167	0.90330	0.90500	0.90678
1.7	0.90864	0.91057	0.91258	0.91467	0.91683	0.90906	0.92137	0.92376	0.92623	0.92877
1.8	0.93138	0.93408	0.93685	0.93969	0.94261	0.94561	0.94869	0.95184	0.95507	0.95838
1.9	0.96177	0.96523	0.96877	0.97240	0.97610	0.97988	0.98374	0.98768	0.99171	0.99581

参考文献

[1] 刘智敏，误差与数据处理，原子能出版社，1981.

[2] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol.1, John Wiley, 1957.

[3] 谢邦杰，线性代数，人民教育出版社，1978.

[4] C. R. Rao, Linear Statistical Inference and Its Applications, John Wiley, 1973.

[5] 刘智敏，均匀分布及其应用，应用数学与计算数学，第2卷，第4期(1965).

[6] 复旦大学数学系，概率论与数理统计，上海科学技术出版社，1960.

[7] 王梓坤，概率论基础及其应用，科学出版社，1976.

[8] 山内二郎主编，统计数值表，JSA，1972.

[9] M. Abramowitz, I.A.Stegun, Handbook of Mathematical Function with Formulas,Graphs and Mathematical Tables, NBS, 1972.

[10] 张尧庭，方开泰，多元统计分析引论，科学出版社，1983.

[11] 克拉美著，魏宗舒、郑朴、吴锦译，统计学的数学方法，上海科学技术出版社，1966.

[12] 唐达，有限个均匀分布随机变量之和的分布，数学的实践与认识，第4期(1981).

[13] 刘智敏，评定精度的最大残差法，中国科学，第4期(1979).

[14] 张世英，刘智敏，测量实践的数据处理，科学出版社，1977.

[15] Liu Zhimin (刘智敏), A Method of Maximum Residual for Evaluating Precision, Scientia Sinica, Special Issue(Ⅰ) (1979).

[16] 刘智敏，评定精度的一种简单方法——极差法，计量工作，第5—6期(1974).

[17] 刘智敏，多次观测的极差，计量工作，第2期(1965).

[18] 刘智敏，用最大误差评定精度的原理和应用，数学的实践与认识，第3期(1975).

[19] 何国伟，误差分析方法，国防工业出版社，1978.

[20] 华东师范大学工作组，正态性检验，标准草案，1983.

[21] ISO, Precision of Test Methods —— Determination of Repeatab-

ility and Reproducibility by Inter-laboratory Tests. International Standard ISO 5725, 1981.

[22] 费史著，王福保译，概率论及数理统计，上海科学技术出版社，1962.

[23] 王柏钧，程积康，多元分析，地质出版社，1982.

[24] 周光亚，赵文，陆承新，王锦功，赵振全，多元统计分析，地质出版社，1982.

[25] S. M. Kandall, A. Stuart, The Advanced Theory of Statistics, Charles Griffin Co. Ltd., 1977.

[26] 刘智敏，残差性质及其应用，计量学报，Vol.1 №3 (1980).

[27] F. E. Grubbs, Sample Criteria for Testing Outlying Observations, *Ann. Math. Statist.*, 21 №1 (1950).

[28] Н. В. Смирнов, *Оценка максимального члена в Рябу наблюдений*, ДАН СССР 1941, Т.33 №5 (1941).

[29] ASTM, Standard Practice for Dealing with Outlying *Observations*, *American National Standards* E178-80, 1980.

[30] W. J. Dixon, Ratios Involving Extreme Values, *Ann. Math. Statist.*, 22 (1951).

[31] 中国科学院系统科学研究所工作组，正态样本异常值的发现和处理，标准草案，1983.

[32] В. И. Романовский, Основные Задачи теории ошибок, ОГИЗ, 1947

[33] 刘智敏，产品寿命研究中韦布尔分布的应用方法，数学的实践与认识，第3期 (1979).

[34] BIPM, *Recommedation INC*-1 (1980). CIPM 81-11, 1981.

[35] K. Weise. *DIN* 1319 *Teil*4, PTB, 1982.

[36] W. Müller, Some Second Thoughts on Error Statement, *Nucl. Instr. and Mech.* 163 (1979)

[37] *H. H. Ku*, Notes on the Use of Propagation of Error Formulas, J. Res. NBS 70C (1966)

[38] BIPM-IEC-ISO-OIML, International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology, VIM, 1983

[39] P. J. Campion, J. E. Burns, A. Williams, A Code of Practice

for the Detailed Statement of Accuracy, NPL, 1973.

[40] 刘智敏，实验的不确定度，计量技术，第4期 (1982).

[41] 林少宫，基础概率与数理统计，人民教育出版社，1956.

[42] 张叔涵，测量误差理论，中国工业出版社，1966.

[43] 张尧庭，广义相关系数及其应用，应用数学学报，Vol,1 №4 (1978).

[44] 冯浩鉴，相关平差概论，测绘出版社，1982.

[45] 方开泰，刘璋温，极差在方差分析中的应用，数学的实践与认识，第1期 (1976).

[46] 方开泰，马毅林，吴传义，刘璋温，数理统计与标准化，技术标准出版社，1981.

[47] 中国科学院数学研究所统计组，方差分析，科学出版社，1977.

[48] K. Weise, Vorschlag zum Begriff der Meβunsicherheit, PTB-Mitteilungen 93 №3 (1983)

[49] C. R. Rao. S. K. Mitra. Generalized Inverse of Matrices and Its Applications, John Wiley, 1971.

[50] A. Bjerhammar. Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses. Elsevier Scientific Publishing Company, 1973

[51] 李庆海，陶本藻，概率统计原理和在测量中的应用，测绘出版社，1982.

[52] Jeffrey T. Fong, Integration of Analysis and Data Bases for Engineering Decision Making, CIME, Vol.5 №1 (1986).